Diss. 4°
3847/11

4° Diss. 3847 (11.

# Programm

womit

## Prorector und Senat

der Grossherzoglich Badischen

## Albert-Ludwigs-Universität

zu Freiburg im Breisgau

zur

## Eröffnung der Wintervorlesungen

**auf den 2. November 1840**

einladen.

---

Das Programm enthält: Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementen-Reihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Staatsbibliothek München

---

**Freiburg,**

Universitäts-Buchdruckerei der GEBRÜDER GROOS.

**1840.**

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Die

# Versetzungen mit Wiederholungen

## zu bestimmten Summen

aus

einer oder mehreren beliebig beschränkten

# Elementen-Reihen

nebst ihrer Anwendung

auf

**Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung**

von

**Dr. L. OETTINGER**

ord. öff. Professor der Mathematik an der Universität Freiburg i. B.

**Freiburg,**

Universitäts-Buchdruckerei der GEBRÜDER GROOS.

**1840.**

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung über die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementenreihen ist als ein Beitrag zur Combinations-Lehre zu betrachten. Die Stelle, welche diese Art von Combinationen im Gebäude der Mathematik einnimmt, wird sich aus dem Inhalte der Abhandlung und den darin gemachten Anwendungen ergeben. Die hierher gehörige Literatur ist am betreffenden Orte aufgeführt. Die Bezeichnungen, deren ich mich bedient habe sind dieselben, welche in meiner Combinations-Lehre vorkommen.

L. Oettinger.

**Der Leser wird gebeten, folgende Unrichtigkeiten zu entfernen:**

Seite 8 Zeile 1 von oben $1^{2|1}$ statt $1^{2|-1}$

„ „ 2 v. ob. $(n-2k-1)^{q-1|-1}$ st. $(n-2k-1)^{q-1|1-1}$

„ „ 9 v. ob. $1^{q-1|1}$ st. $1^{q-1|-1}$

„ „ 15 v. ob. $-\frac{3.2.1}{1.2.3}$ st. $+\frac{3.2.1}{1.2.3}$

„ 9 „ 11 v. ob. 7) st. 6)

„ 16 „ 11 v. u. $1^{q-1|1}$ st. $1^{q-1|-1}$

„ 24 „ 8 v. ob. gelöst st. gelösst.

„ 31 „ 10 v. ob. $3h^2 \frac{(n+q-h-2r-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}$ st. $3h^2 \frac{(n+q-h-r-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}$

„ 32 „ 1 v. ob. $\sum_{m+1}^{n} A$ st. $\sum_{m+1} A$

„ 50 „ 17 v. ob $b_{r_2}$ st. $a_{r_2}$

„ 50 „ 18 v. ob. $c_{r_3}$ st. $a_{r_3}$

„ 57 „ 2 v. u. Tafel st. Formel.

„ 64 „ 1 v. u. $10^{q-1}$ st. 10-1.

## §. 1.

**Der einfachste Fall, welcher in der folgenden Untersuchung zur Frage kömmt und die Grundlage bildet, ist:**

$$1)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_r]^q$$

**Es sollen nämlich unter**

$$P'(sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_r)^q$$

**die Gruppen verstanden werden, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Klasse aus den Elementen $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . . . $a_r$ gebildet werden; unter**

$$P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_r]^q$$

**die Anzahl dieser Gruppen. Diese Zeichen sind die nämlichen, deren ich mich in meiner Combinationslehre bedient habe. Wird die Anzahl der Elemente, woraus die Gruppen der Versetzungen zu bestimmten Summen in irgend einer Klasse gebildet werden sollen, als vollständig angenommen, so ist bekanntlich**

$$2)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_r,\ a_{r+1}\ .\ .\ .\ .\ a_{n-q+1}]^q = \frac{(n-1)^{q-1}}{1^{q-1}\,|\,1}$$

**Um die unter 1 gestellte Aufgabe zu lösen, soll die Zahl der Elemente, woraus die Gruppen gebildet werden, vollständig angenommen werden; dann sollen diejenigen Gruppen, worin das Element mit der höchsten Stellenzahl $(a_n - q + 1)$ erscheint; dann diejenigen, worin das Element mit der zweit-höchsten Stellenzahl $(a_n - q)$; dann diejenigen, worin das Element mit der dritt-höchsten Stellenzahl erscheint, ausgeschlossen werden. Diefs wird bis zu dem Elemente $a_r + 1$ fortgeführt. Durch dieses Ausscheiden entstehen Versetzungen mit Wiederholungen in der $(q-1)^{ten}$ Classe zu den ergänzenden Summen aus lauter vollständigen Elementen-Reihen, und es ergibt sich für die auszuscheidenden Gruppen folgende Darstellung**

$$a_{n-q+1}\,P'(s\,(q-1)\,)^{q-1} + a_{n-q}\,P'(\,sq\,)^{q-1} + a_{n-q-1}\,P'(s\,(q+1))^{q-1}$$
$$+ a_{n-q-2}\,P'(\,s\,(q+2)\,)^{q-1} \ldots + a_{r+1}\,P'\,(s(n-r-1)\,)^{q-1}$$

**In allen den Gruppen, welche hier angezeigt sind, nimmt das ausgeschiedene bezügliche Element die verschiedenen Stellungen ein, welche durch die Versetzungen geboten werden. Ihre Anzahl ist q. Die Anzahl der Gruppen, welche sich hieraus und aus 2 folgert, ist**

$$3)\ q\,[1 + \frac{2^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} + \frac{3^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} + \frac{4^{q-2|1}}{1^{q-2|1}} + \ldots, \ldots \frac{(n-r-q+1)^{q-2|1}}{1^{q-2|1}}$$
$$= q\,.\,\frac{(n-r-q+1)^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} = q\,.\,\frac{(n-r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

**Dieses Ausscheiden gibt so lange ein richtiges Resultat, als der Werth der Stellenzahl des ausgeschiedenen Elementes grösser ist, als die Werthe der Stellenzahlen derjenigen Elemente, die in den Gruppen vorkommen, welche durch die Bildung der Versetzungen mit Wiederholungen in der $(q-1)^{ten}$ Classe zu den verschiedenen Summen entstehen. Wird aber der Werth der Stellenzahlen der ausgeschiedenen Elemente so grofs, oder kleiner, als der in den Gruppen vorkommenden, so ist das Ausscheiden zu oft, und bei ungleichen Stellenzahlen unter zwei Elementen geschehen. Dieser Fehler mufs entfernt, und die hiedurch entstandenen Gruppen von der Anzahl der ausgeschiedenen selbst wieder ausgeschieden, oder dem Ganzen zugezählt werden. Hiernach wird nöthig, je zwei Elemente von den eingeführten**

$$a_{r+1},\ a_{r+2},\ a_{r+3},\ \ldots\ a_{n-q+1}$$

**zugleich auszuscheiden und mit jedem Paare die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $(q-2)^{ten}$ Classe zu den ergänzenden Summen in Verbindung treten zu lassen. Hieraus ergibt sich folgende Darstellung**

$$a_{r+1}\,a_{n-r-q+1}\,P'(s(q-2))^{q-2} + a_{r+2}a_{n-r-q}P'(s(q-2))^{q-2} \quad + \ldots\, a_{n-r+q+1}\,a_{r+1}P'(s(q-2))^{q-2}$$
$$a_{r+1}\,a_{n-r-q}\,P'(s\,(q-1))^{q-2} + a_{r+2}a_{n-r-q-1}P'(s(q-1))^{q-2}$$
$$a_{r+1}\,a_{n-r-q-1}\,P'\,(sq)^{q-2} \quad + a_{r+2}\,a_{n-r-q-2}\,P'\,(sq)^{q-2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{r+1}a_{r+1}P'(s\,(n-2r-2))^{q-2} + a_{r+2}\,a_{r+2}P'(s(n-2r-3))^{q-2}$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots)$$

Jedes Paar von den ausgeschiedenen Elementen nimmt mit den Gruppen, welche durch die Versetzungen mit Wiederholungen zu den ergänzenden Summen hervorgebracht werden, alle mögliche Stellungen ein. Diefs fällt mit den Zerstreuungen zweier Elemente in q Fächer zusammen. Die Anzahl dieser Zerstreuungen ist $\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}$, §. 41 Combinations-Lehre. Hieraus ergibt sich in Rücksicht auf 2 folgende Darstellung für die Anzahl der Gruppen.

$$4)\ \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\Big[1+\frac{2^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}+\frac{3^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}+\frac{4^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}+\ldots\ldots\frac{(n-2r-q+1)^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}$$
$$+1+\frac{2^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}+\frac{3^{q-3|3}}{1^{q-3|1}}+\ldots\ldots\frac{(n-2r-q)^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}$$
$$+1+\frac{2^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}+\ldots\ldots\frac{n-2r-q-1)^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1^{q-3|1}}{1^{q-3|1}}\Big]$$

Vereinigt man diese Reihen in horizontaler oder vertikaler Richtung, so gehen sie in folgende über:

$$\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\Big[1+\frac{2^{q-2|1}}{1^{q-2|1}}+\frac{3^{q-2|1}}{1^{q-2|1}}+\frac{4^{q-2|1}}{1^{q-2|1}}+\ldots\ldots\frac{(n-2r-q+1)^{q-2|1}}{1^{q-2|1}}\Big]=$$
$$=\frac{q(q-1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2r-q+1)^{q-1|1}}{1^{q-1|1}}=\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(n-2r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

Diese Schlüsse sind so lange richtig, bis die, oben über den Werth der Stellenzahlen der ausgeschiedenen Elemente gemachte, Bemerkung eintritt. Geschieht diefs, so mufs zu dem Ausscheiden eines dritten Elementes geschritten werden. Es ergibt sich folgende Darstellung

$$a_{r+1}\,a_{r+1}\,a_{n-2r-q+1}P'(s(q-3))^{q-3}+a_{r+1}\,a_{r+2}\,a_{n-2r-q}P'(s(q-3))^{q-3}\ldots.a_{r+1}\,a_{n-2r-q+1}a_{r+1}\,P'(s(q-3))^{q-3}$$
$$a_{r+1}\,a_{r+1}\,a_{n-2r-q}\,P'\,(s(q-2))^{q-3}+a_{r+1}\,a_{r+2}\,a_{n-2r-q-1}\,P'(s(q-2))^{q-3}$$
$$a_{r+1}\,a_{r+1}\,a_{r-2r-q-1}\,P'(s(q-1))^{q-3}+a_{r+1}\,a_{r+2}\,a_{n-2r-q-2}\,P'(s(q-1))^{q-3}$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$a_{r+1}\,a_{r+1}\,a_{r+1}\,P'(s(n-3r-3))^{q-3}+a_{r+1}\,a_{r+2}\,a_{r+1}\,P'(s(n-3r-4))^{q-3}$$

$$+a_{r+2}a_{r+1}a_{n-2r-q}P'(s(q-3))^{q-3}+a_{r+2}a_{r+2}a_{n-2r-q-1}P'(s(q-3))^{q-3}\ldots a_{r+2}a_{n-2r-q}a_{r+1}P'(s(q-3))^{q-3}$$
$$a_{r+2}a_{r+1}a_{n-2r-q-1}P'(s(q-2))^{q-3}+a_{r+2}a_{r+2}a_{n-2r-q-2}P'(s(q-2))^{q-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{r+2}a_{r+1}a_{r+1}P'(s(n-3r-4))^{q-3}+a_{r+2}a_{r+2}a_{r+1}P'(s(n-3r-5))^{q-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n-2r-q+1}a_{r+1}a_{r+1}P'((q-3))^{q-3}$$
$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots\ldots\ldots)$$

**Jede Gruppe, welche bei Bildung der Versetzungen mit Wiederholungen zu den ergänzenden Summen in der $(q-3)^{ten}$ Classe entsteht, tritt mit den zugehörigen ausgeschiedenen Elementen in alle mögliche Stellungen zusammen. Diese stimmen mit den Zerstreuungen dreier Elemente in q Fächer überein. Die Anzahl, die sich hieraus ergibt, ist $\frac{q(q-1)(q-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$. Diese Bemerkungen führen in Rücksicht auf die vorstehende Darstellung und auf Nro. 2 zu folgender Gruppenanzahl**

$$5)\quad \frac{q^{3|-1}}{1^{3|}}\Big[1+\left(\tfrac{2}{1}\right)^{q-4|1}+\left(\tfrac{3}{1}\right)^{q-4|1}+\left(\tfrac{4}{1}\right)^{q-4|1}+\ldots\left(\frac{n-3r-q+1}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$+\ 1\ +\left(\tfrac{2}{1}\right)^{q-4|1}+\left(\tfrac{3}{1}\right)^{q-4|1}\ldots\left(\frac{n-3r-q}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$1\ +\left(\tfrac{2}{1}\right)^{q-4|1}\ldots\left(\frac{n-3r-q-1}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$+\ 1\ \ldots\left(\frac{n-3r-q-2}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$\vdots$$
$$1$$
$$+\ 1\ +\left(\tfrac{2}{1}\right)^{q-4|1}+\left(\tfrac{3}{1}\right)^{q-4|1}\ldots\left(\frac{n-3r-q}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$1\ +\left(\tfrac{2}{1}\right)^{q-4|1}\ldots\left(\frac{n-3r-q-1}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$+\ 1\ \ldots\left(\frac{n-3r-q-2}{1}\right)^{q-4|1}$$
$$\vdots$$
$$1$$
$$\vdots$$
$$1\Big].$$

Werden diese Reihen, wie unter 4, zusammengezogen, so entsteht

$$\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{q-2|1}+\left(\frac{3}{1}\right)^{q-2|1}+\left(\frac{4}{1}\right)^{q-2|1}\ldots\ldots\left(\frac{n-3r-q+1}{1}\right)^{q-2|1}\right]$$
$$=\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{n-3r-q+1}{1}\right)^{q-1|1}=\frac{q^{31-1}}{1^{3|1}}\frac{(n-3r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

Diese Schlüsse setzen sich leicht weiter fort. Hiernach bestimmt sich die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen in der $q^{ten}$ Classe zur Summe n, wenn nur die Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ statt aller zur Bildung der Summe mitwirken, durch folgende Gleichung:

6) $$P'[sn; a_1, a_2, \ldots a_r]^q=\frac{(n-1)^{q-1|1}}{1^{q-1|1}}-q.\frac{(n-r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}+\frac{q^{2|1}}{1^{2|1}}\frac{(n-2r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\ldots.$$
$$=\sum_{x=o}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\cdot\left(\frac{n-xr-1}{1^{q-1|1}}\right)^{q-1|-1}$$

Die Gleichung bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergehen, oder negativ werden sollte. Diese Gleichung ist bekannt, und nach Lacroix (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 53) von Moivre (Miscellanea analytica p. 196.) durch das Polynomium entwickelt worden. Laplace hat sie in Théorie analytique des probabilités Nro. 13 entwickelt. In meiner Lehre von den Combinationen findet sie sich §. 20 angegeben. Hier erscheint sie aus der Natur der Combinationon jedoch auf eine etwas andere Weise, als dort, abgeleitet.

Zieht man die eben gefundene Gleichung von 2 ab, so ergibt sich die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen in der $q^{ten}$ Classe zur Summe n, worin die Elemente $a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}\ldots a_{n-q+1}$ ein oder auch mehreremal vorkommen. Diefs soll durch folgende Darstellung angedeutet werden

7) $$P'[sn; a_1, a_2, a_3 \ldots a_r, 0]^q$$
$$q.\frac{(n-r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}-\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{(n-2r-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}+\frac{q^{3|-1}(n-3r-1)^{q-1|-1}}{1^{3|1}\quad 1^{q-1|1}}-\ldots$$

Durch die in diesem §. angedeutete Methode ergibt sich die Aufsuchung anderer Sätze leicht, denn hierin liegt die Vorbereitung und Möglichkeit für die nachfolgenden Entwicklungen.

## §. 2.

Wir wenden uns zu der Auflösung folgenden Problems

1) $P'[sn; a_1, a_2 \ldots a_h, a_{k+1} \cdot a_{k+2} \ldots a_{n-q+1}]^q$

**wornach die Anzahl der Gruppen bestimmt werden soll, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden und dabei die Elemente**

$$a_{h+1}, a_{h+2}, a_{h+3}, \ldots a_k$$

**von der Mitwirkung ausgeschlossen bleiben.**

**Um die vorliegende Aufgabe zu lösen, wird die Elementen-Reihe, woraus die Gruppen gebildet werden, ununterbrochen oder vollständig angenommen, darauf werden die Elemente**

$$a_{h+1}, a_{h+2}, a_{h+3}, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_{n-q+1}$$

**mit den zugehörigen Summen ausgeschieden, und von der Zahl der ausgeschiedenen Gruppen die Elemente**

$$a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3} \ldots a_{n-q+1}$$

**mit den zugehörigen Summen selbst wieder ausgeschieden. Hiernach ist das, zu 3 des vorigen §. angegebene, Verfahren doppelt anzuwenden. Diefs führt zu folgender Darstellung**

$$\begin{array}{llll}
a_{n-q+1} P'(s[q-1])^{q-1} & - & a_{n-q+1} P'(s[q-1])^{q-1} \\
a_{n-q} P'(sq)^{q-1} & - & a_{n-q} P'(sq)^{q-1} \\
a_{n-q-1} P'(s[q+1])^{q-1} & - & a_{n-q-1} P'(s[q+1])^{q-1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k+1} P'(s[n-k-1])^{q-1} & - & a_{k+1} P'(s[n-k-1])^{q-1} \\
a_k P'(s[n-k])^{q-1} & & \\
a_{k-1} P'(s[n-k+1])^{q-1} & & \\
\vdots & & \\
a_{h+2} P'(s[n-h-2])^{q-1} & & \\
a_{h+1} P'(s[n-h-1])^{q-1} & & \\
(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & a_{n-q+1})
\end{array}$$

**Werden die Zahlenausdrücke in diese Darstellung eingeführt und die erhaltenen Resultate, wie unter 3 des vorigen §. geschah, summirt, so ergibt sich folgender Zahlenausdruck für die von der Gesammtzahl abzuziehende Gruppenzahl.**

$$2)\ A_1 = q.\left(\frac{(n-h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

**Bei diesem Ausscheiden sind, wie man erkennt, zu viele Gruppen ausgeschieden worden. Diefs tritt ein, wenn der Werth der Stellen-**

zahlen der ausgeschiedenen Elemente so grofs, oder gröfser wird, als derjenige der Stellenzahlen, die in den zugehörigen Summengruppen vorkommen. Um diesen Fehler zu entfernen, müssen zwei Elemente aus den Gruppen genommen und die Zahl der zu oft ausgeschiedenen bestimmt werden. Die Zurückführung der Elemente auf die ununterbrochene Elementen-Zahl führt auch hier zum Zweck. Durch sie ergibt sich folgende Darstellung

$$
\begin{array}{l}
a_{h+1}\left|\begin{array}{l} a_{n-h-q+1}P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-h-q}P'(s[q-1])^{q-2} \\ a_{n-h-q-1}P'(sq)^{q-2} \\ \vdots \\ a_{k+1}P'(s[n-h-k-2])^{q-2} \\ a_{k}\,P'(s[n-h-k-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}P'(s[n-2h-2])^{q-2} \end{array}\right. + a_{h+2}\left|\begin{array}{l} a_{n-h-q}P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-h-q-1}P'(s[q-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{k+1}P'(s[n-h-k-2])^{q-2} \\ a_{k}\,P'(s[n-h-k-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}\,P'(s[n-2h-3])^{q-2} \end{array}\right. \ldots\ldots a_{n-h-q+1}a_{h+1}\,P'(s[q-2])^{q-2} \\
-a_{k+1}\left|\begin{array}{l} a_{n-k-q+1}P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-k-q}P'([q-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{k+1}\,P'(s[n-2k-2])^{q-2} \\ a_{k}\,P'(s[n-2k-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}\,P'(s[n-k-h-2])^{q-2} \end{array}\right. - a_{k+2}\left|\begin{array}{l} a_{n-k-q}P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-k-q-1}\,P'(s[q-1])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{k+1}\,P'(s[n-2k-3])^{q-2} \\ a_{k}\,P'(s[n-2k-2])^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}\,P'(s[n-k-h-3])^{q-2} \end{array}\right. - \ldots\ldots - a_{n-k-q+1}a_{k+1}P'(s[q-2])^{q-2} \\
\qquad (a_1,\quad a_2,\quad a_3\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad )
\end{array}
$$

In dieser Darstellung müssen die Elemente $a_{k+1}$, $a_{k+2}$, $a_{k+3}$ . . . selbst wieder als auszuscheidende betrachtet werden. Diefs geschieht, indem man nur die ausgeschiedenen Elemente auf der rechten Seite der Vertikalstriche beachtet, und sie nach den zu 2 gemachten Bemerkungen behandelt. Nimmt man hiebei auf die, zu 4 des vorigen §. vorausgeschickten, Andeutungen Rücksicht, so ergibt sich als zuzuzählende Gruppen-Anzahl, wenn gehörig summirt wird:

$$3)\ A_2 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|-1}}\left(\frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$- \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-2k-1)^{q-1|1-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$= \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-h-k-1)^{q-1|1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

**Wird diese Entwicklungsweise weiter fortgeführt, so entsteht für die Zahl der ferner auszuscheidenden Gruppen, welche durch Ausstossen eines neuen Elementes gewonnen wird, folgende Darstellung**

$$4)\ A_3 = \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n-3h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-2h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-h-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n-2h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-h-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-3k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$= \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{n-3h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 3\frac{(n-2h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + 3\frac{(n-h-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-3k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|-1}}\right)$$

**Werden die gefundenen Ausdrücke vereinigt, so ergibt sich zur Auflösung der unter 1 vorgelegten Aufgabe folgende Gleichung**

$$5)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_k,\ a_{h+1},\ a_{h+2},\ \ldots\ a_{n-q+1}]^q =$$
$$= \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - q\left(\frac{(n-h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-k-1)^{q-11-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-k-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n-3h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{3}{1}\frac{(n-2h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{3.2}{1.2}\frac{(n-h-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{3.2.1}{1.2.3}\cdot\frac{(n-3k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**oder**

$$6)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_h,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots\ a_{n-q+1}]^q$$
$$= \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{m=y+z}(-)^z \frac{(z+y)^{z+y|-1}}{1^{z|1}\ 1^{y|1}} \cdot \frac{(n-yh-zk-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

**Hier gilt folgende Bedingungsgleichung**

$$m = y + z = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

**Für jeden besondern Werth von x sind für die Grössen y + z in dem Ausdrucke yh + zk der Fakultät $\frac{(n-yh-zk-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$ die Versetzungen mit Wiederholungen in der zweiten Classe zu der Summe, welche gerade der Werth von x angibt, aus den Elementen o, 1, 2, 3, ... x**

zu setzen. Im vorliegenden Falle ergeben sich folgende Bedeutungen

| y z, | y z, | y z, | y z, | y z, | . . . |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 0 | 0 2 | 0 3 | 0 4 | |
| | 0 1 | 1 1 | 1 2 | 1 3 | |
| | | 2 0 | 2 1 | 2 2 | |
| | | | 3 0 | 3 1 | |
| | | | | 4 0 | |

Setzt man k—h=d in der Gleichung 5, so gewinnt man auch folgende Darstellung:

6) $P'[sn; a_1, a_2 \ldots a_h, a_{k+1}\ a_{k+2} \ldots a_{n-q+1}]^q =$

$$\frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1}\left(\frac{(n-h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-h-d-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-2h-d-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-2h-2d-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

## §. 3.

**Der Gang der Untersuchung führt zu folgender Aufgabe**

1) $P'[sn; a_1, a_2, \ldots a_h, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_p]^q$

**Bei Bildung der Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen sollen hiernach die Elemente $a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots a_k$ und $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_{n-q+1}$ nicht mitwirken.**

**Um die vorstehende Aufgabe zu lösen, wird auch hier die Elementen-Reihe ununterbrochen angenommen, darauf werden die die Elemente**

$$a_{h+1}, a_{h+2}, a_{h+3} \ldots \ldots \ldots a_{n-q+1}$$

**mit den zugehörigen Summen ausgeschieden, hievon selbst wieder die Elemente**

$$a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3} \ldots \ldots \ldots a_{n-q+1}$$

**mit den zugehörigen Summen und endlich von letztern die, welche mit den Elementen**

$$a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3} \ldots \ldots \ldots a_{n-q+1}$$

**verbunden sind. Derselbe Zweck wird auch erreicht, wenn man bei der Ausscheidung der Elemente**

$$a_{h+1},\ a_{h+2},\ a_{h+3}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-q+1}$$

**das zu §. 2, Nro. 2 angegebene Verfahren anwendet. Dieſs führt zu folgender Darstellung**

$$\begin{array}{lllllll}
a_{n-q+1}\,P'(s[q-1])^{q-1} & - & a_{n-q+1}\,P'(s[q-1])^{q-1} & + & a_{n-q+1}\,P'(s[q-1])^{q-1} \\
a_{n-q}\,P'(s\,q)^{q-1} & - & a_{n-q}\,P'(s\,q)^{q-1} & + & a_{n-q}\,P'(s\,q)^{q-1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{h+1}P'(s[n-h-1])^{q-1} & - & a_{k+1}P'(s[n-k-1])^{q-1} & + & a_{p+1}P'(s[n-p-1])^{q-1}
\end{array}$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ .\ .\ .\ .\ .\ .)\ .$$

**Benützt man die zu §. 1 gemachten Bemerkungen, so gewinnt man hieraus zur Bestimmung der erforderlichen Gruppen-Anzahl folgenden Ausdruck**

$$2)\ A_1 = q\left(\frac{(n-h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{(n-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

**In diesem Ausdrucke sind zu viele Gruppen begriffen. Um den Ueberschuſs zu erhalten, wird, wie früher, ein weiteres Element aus den begleitenden Summen ausgeschieden. Die Gruppen werden auf die ununterbrochene Elementen-Reihe zurückgeführt, und die Ausscheidungen in Beziehung auf die drei Elementen-Reihen**

$$\begin{array}{l}
a_{h+1},\ a_{h+2},\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-q+1} \\
a_{k+1},\ a_{k+2},\ .\ .\ .\ .\ a_{n-q+1} \\
a_{p+1},\ a_{p+2},\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-q+1}
\end{array}$$

**gemacht, die den eben angeführten Gesetzen unterliegen, und zugleich nach den frühern gemachten Bemerkungen behandelt werden. Dieſs führt zu folgender Darstellung**

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a_{h+1} & a_{n-h-q+1}P'(s[q-2])^{q-2} & +a_{h+2} & a_{n-h-q}\,P'([q-2])^{q-2} + \ldots a_{n-h-q+1}\,a_{h+1}P'(s[q-2])^{q-2} \\
 & a_{n-h-q}\,P'(s[q-1])^{q-2} & & a_{n-h-q-1}P'(s[q-1])^{q-2} \\
 & a_{n-h-q-1}\,P'(sq)^{q-2} & & a_{n-h-q-2}\,P'(s\,q)^{q-2} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & a_{h+1}\,P'(s[n-2h-2])^{q-2} & & a_{h+1}P'(s[n-2h-3])^{q-2} \\
-a_{k+1} & a_{n-k-q+1}\,P'(s[q-2])^{q-2} & -a_{k+2} & a_{n-k-q}\,P'(s[q-2])^{q-2} \ldots -a_{n-k-q+1}a_{k+1}P'(s[q-2])^{q-2} \\
 & a_{n-k-q}\,P'(s[q-1])^{q-2} & & a_{n-k-q-1}P'(s(q-1])^{q-2} \\
 & a_{n-k-q-1}\,P'(s\,q)^{q-2} & & a_{n-k-q-2}\,P'(sq)^{q-2} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & a_{h+1}\,P'(s[n-h-k-2])^{q-2} & & a_{h+1}\,P'(s[n-k-h-3])^{q-2}
\end{array}$$

$$+a_{p+1}\begin{vmatrix} a_{n-p-q+1}\,P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-p-q}\,P'(s[q-1])^{q-2} \\ a_{n-p-q-1}\,P'(sq)^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}\,P'(s[n-p-h-2])^{q-2} \end{vmatrix} + a_{p+2}\begin{vmatrix} a_{n-p-q}\,P'(s[q-2])^{q-2} \\ a_{n-p-q-1}\,P(s[q-1])^{q-2} \\ a_{n-p-q-2}\,P'(sq)^{q-2} \\ \vdots \\ a_{h+1}\,P'(s[n-p-h-3])^{q-2} \end{vmatrix} \ldots + a_{n-p-q+1}\,a_{p+1}P'(s[q-2])^{q-2}$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots)$$

**Werden nun die eben gemachten Bemerkungen mit den, zu Nro. 2 §. 2 und Nro. 4 §. 2 gemachten, in Verbindung gebracht, so ergibt sich zur Bestimmung des hiezu gehörigen Zahlenausdrucks folgende Darstellung**

$$3)\ A_2 = \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{q-1|1}} \Big( (n-2h-1)^{q-1|-1} - (n-h-k-1)^{q-1|-1} + (n-h-p-1)^{q-1|-1}$$
$$- (n-h-k-1)^{q-1|-1} + (n-2k-1)^{q-1|-1} - (n-k-p-1)^{q-1|-1}$$
$$+ (n-p-h-1)^{q-1|-1} - (n-p-k-1)^{q-1|-1} + (n-2p-1)^{q-1|-1} \Big)$$
$$= \frac{q^{2-1}}{1^{2|1}} \Big( \frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + 2\frac{(n-h-p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - 2\frac{(n-k-p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$
$$+ \frac{(n-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(n-2p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \Big)$$

**Wird nun ein weiteres Element ausgeschieden und diese Schlufsweise fortgesetzt, so entsteht:**

$$4)\ A_3 = \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} \frac{1}{1^{q-1|1}} [(n-3h-1)^{q-1|-1} - 2(n-2h-k-1)^{q-1|-1} + 2(n-2h-p-1)^{q-1|-1}$$
$$- 2(n-h-k-p-1)^{q-1|-1} + (n-h-2k-1)^{q-1|-1} + (n-h-2p-1)^{q-1|-1} - (n-k-2h-1)^{q-1|-1}$$
$$+ 2(n-h-2k-1)^{q-1|-1} - 2(n-k-h-p-1)^{q-1|-1} + 2(n-2k-p-1)^{q-1|-1} - (n-3k-1)^{q-1|-1}$$
$$- (n-k-2p-1)^{q-1|-1} + (n-p-2h-1)^{q-1|-1} - 2(n-p-h-k-1)^{q-1|-1} + 2(n-2p-h-1)^{q-1|-1}$$
$$- 2(n-k-2p-1)^{q-1|-1} + (n-2k-p-1)^{q-1|-1} + (n-3p-1)^{q-1|-1}]$$
$$= \frac{q^{3-1|-1}}{1^{3|1}} \frac{1}{q^{q-1|1}} [(n-3h-1)^{q-1|-1} - 3(n-2h-k-1)^{q-1|-1} + 3(n-2h-p-1)^{q-1|-1}$$
$$+ 3(n-h-2k-1)^{q-1|-1} - 6(n-h-k-p-1)^{q-1|-1} + 3(n-h-2p-1)^{q-1|-1}$$
$$- (n-3k-1)^{q-1|-1} + 3(n-2k-p-1)^{q-1|-1} - 3(n-k-2p-1)^{q-1|-1} + (n-3p-1)^{q-1|-1}]$$

**Die Ableitung von 4 ergibt sich aus 3 leicht, wenn allmälig n-h, n-k, n-p statt n in 3 gesetzt wird. Die weiteren Ableitungen ergeben sich auf gleiche Weise. Es ist für die unter 1 vorgelegte Aufgabe**

5) $P'[sn; a_1, a_2 \ldots a_h, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_p]^q = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 \ldots$

$$= \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1} \cdot 1^{q-1|1}} \Big( (n-h-1)^{q-1|-1} - (n-k-1)^{q-1|-1} + (n-p-1)^{q-1|-1} \Big)$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{q-1|1}} \Big( (n-2h-1)^{q-1|-1} - 2 \begin{vmatrix} (n-h-k-1)^{q-1|-1} \\ -(n-h-p-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix} + \frac{2.1}{1.2} \begin{vmatrix} (n-2k-1)^{q-1|-1} \\ -2(n-k-p-1)^{q-1|-1} \\ (n-2p-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix} \Big)$$

$$- \frac{q^{3|1}}{1^{2|1}} \frac{1}{1^{q-1|1}} \Big( (n-3h-1)^{q-1|-1} - 3 \begin{vmatrix} (n-2h-k-1)^{q-1|-1} \\ -(n-2h-p-1)^{q-1|-1} \\ \vdots \end{vmatrix} + \frac{3.2}{1.2} \begin{vmatrix} (n-h-2k-1)^{q-1|-1} \\ -2(n-h-k-p-1)^{q-1|-1} \\ +(n-h-2p-1)^{q-1|-1} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

$$- \frac{3.2.1}{1.2.3} \begin{vmatrix} (n-3k-1)^{q-1|-1} \\ -\frac{3}{1}(n-2k-p-1)^{q-1|-1} \\ +\frac{3.2}{1.2}(n-k-2p-1)^{q-1|-1} \\ -\frac{3.2.1}{1.2.3}(n-3p-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix} \Big)$$

$$\vdots$$

oder

6) $P'[sn; a_1, a_2, \ldots a_h, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_p]^q =$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \Big( \sum^{x=w+y+z} (-)^y \cdot \frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1} \cdot 1^{y|1} \cdot 1^{z|1}} \frac{(n-wh-yk-zp-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \Big)$$

Hiebei gelten die Bedingungsgleichungen, wornach

$$x = 0, 1, 2, 3 \ldots q$$

und für jeden einzelnen Werth von x

$$x = w + y + z$$

ist, wornach ferner statt w, y, z alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen in der dritten Classe aus den Elementen 0, 1, 2, . . . . x gebildet, die betreffenden Werthe für w, y, z in das vorstehende Symbol eingeführt werden sollen. Es ist also:

| w y z, | w y z, | w y z, | w y z . . . . . |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 0 1 | 0 0 2 | 0 0 3 |
| | 0 1 0 | 0 1 1 | 0 1 2 |
| | 1 0 0 | 0 2 0 | 0 2 1 |
| | | 1 0 1 | 0 3 0 |
| | | 1 1 0 | 1 0 2 |
| | | 2 0 0 | 1 1 1 |
| | | | 1 2 0 |
| | | | 2 0 1 |
| | | | 2 1 0 |
| | | | 3 0 0 |

Das Gesetz, welches dieser Darstellung zu Grunde liegt, ist leicht erkennbar, Es stimmt vollkommen mit dem des Trinomiums überein, wenn h, k, p als Grundgröfsen betrachtet, die, durch Entwicklung entstandenen, Exponenten als Coefficienten der zugehörigen Grundgröfse vorgeschrieben und die so erhaltenen Werthe mit dem negativen Zeichen in die Fakultäten der Gröfse n eingeführt werden.

Es zeigt sich, dafs die bisher befolgte Entwicklungsweise einem festen Gesetze unterliegt. Wird sie weiter fortgeführt, so ergibt sie auf gleiche Weise folgende Darstellung

7) $$P'[sn; a_1, a_2, a_3 \ldots, a_h, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_p, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots a_{n-q+1}]^q =$$

$$= \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1^{q-1|1}}[(n-h-1)^{q-1|-1} - (n-k-1)^{q-1|-1} + (n-p-1)^{q-1|-1} - (n-r-1)^{q-1|-1}]$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \frac{1}{1^{q-1|1}}[(n-2h-1)^{q-1|-1} - 2\left|\begin{array}{l}(n-h-k-1)^{q-1|-1} \\ -(n-h-p-1)^{q-1|-1} \\ +(n-h-r-1)^{q-1|-1}\end{array}\right. + \frac{2.1}{1.2}\left|\begin{array}{l}(n-2k-1)^{q-1|-1} \\ -2\left|\begin{array}{l}(n-k-p-1)^{q-1|-1} \\ -(n-k-r-1)^{q-1|-1}\end{array}\right. \\ +\frac{2.1}{1.2}\left|\begin{array}{l}(n-2p-1)^{q-1|-1} \\ -2(n-p-r-1)^{q-1|-1} \\ +(n-2r-1)^{q-1|-1}]\end{array}\right.$$

$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{1}{1^{q-1|1}}[(n-3h-1)^{q-1|-1} - 3\left|\begin{array}{l}(n-2h-k-1)^{q-1|-1} \\ -(n-2h-p-1)^{q-1|-1} \\ +(n-2h-r-1)^{q-1|-1}\end{array}\right. + \frac{3.2}{1.2}\left|\begin{array}{l}(n-h-2k-1)^{q-1|-1} - \ldots. \\ -2\left|\begin{array}{l}(n-h-k-p-1)^{q-1|-1} \\ -(n-h-k-r-1)^{q-1|-1}\end{array}\right. \\ +\frac{2.1}{1.2}\left|\begin{array}{l}(n-h-2p-1)^{q-1|-1} \\ -2(n-h-p-r-1)^{q-1|-1} \\ +(n-h-2r-1)^{q-1|-1}\end{array}\right.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**u. s. w. oder**

8) $$P'[sn; a_1, a_2, a_3 \ldots a_h, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_p, a_{r+1}, a_{r+2} \ldots a_{n-q+1}]^q =$$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=v+w+y+z} (-)^{w+z} \frac{(v+w+y+z)^{v+w+y+z|-1}}{1^{v|1}.1^{w|1}.1^{y|1}.1^{z|1}} \cdot \frac{(n-vh-wk-yp-zr-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \right)$$

**wenn x=0, 1, 2, 3, . . . q, für jeden einzelnen Werth von x.**

$$x = v + w + y + z$$

**und für v, w, y, z alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen zur vierten Classe aus den Elementen 0, 1, 2, 3...x gebildet und auf die früher schon bezeichnete Weise in das Symbol eingeführt werden.**

Mittelst dieser Bemerkungen läfst sich nun das allgemeine Gesetz, das alle Gebilde dieser Art in sich begreift, leicht darstellen. Es ist in folgendem Ausdrucke enthalten.

$$9)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{r_1}$$
$$a_{p_2+1},\ a_{p_2+2},\ a_{p_2+3}\ \ldots\ a_{r_2}$$
$$a_{p_3+1},\ a_{p_3+2},\ a_{p_3+3}\ \ldots\ a_{r_3}$$
$$a_{p_4+1},\ a_{p_4+2},\ a_{p_4+3}\ \ldots\ a_{r_4}$$
$$\vdots$$
$$a_{p_h+1},\ a_{p_h+2},\ a_{p_h+3},\ \ldots\ a_{r_h}$$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^{y_2+y_3+\ldots y_h} \frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}\,1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}\,1^{y_2|1}\,1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}} \right.$$
$$\left. \times \frac{(n-z_1r_1-z_2r_2-\ldots z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3\ldots-y_hp_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \right)$$

wenn $x=0, 1, 2, 3, 4 \ldots q$ und für jeden Werth von x.

$$x = y_2 + y_3 + y_4 \ldots y_h + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots z_h$$

wenn ferner

$$m = y_2 + y_3 + \ldots y_h + z_1 + z_2 + z_3 \ldots z_h$$

und aus m alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3 . . . . x zur so vielten Classe gebildet werden, welche entstehet, wenn die Gröfsen

$$y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_h,\ z_1,\ z_2,\ z_3\ \ldots\ z_h$$

als Einheiten betrachtet werden. Diefs weifst auf die $(2h-1)^{te}$ Classe, wenn $r_h$ kleiner als $n-q+1$ ist. Dabei ist zu bemerken, dafs sich die Buchstaben

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_h$$

auf die Stellenzahlen $p_2, p_3, p_4 \ldots p_h$ und

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ z_h$$

auf $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots r_h$ beziehen.

## §. 4.

Die in dem Vorhergehenden gefundenen Resultate sind vieler Anwendungen fähig. Diese erstrecken sich nicht nur auf die Combina-

tionen selbst, sondern auf eine besondere Classe von Polynomien, die eigens durch sie entwickelt werden können, und auf Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Die Anwendbarkeit dieser Gleichungen auf Combinationen ergibt sich aus §. 18 meiner Combinations-Lehre. Aus den dort gegebenen Sätzen leiten sich leicht folgende ab

1) $P'[sn\,;\,a_{f+1},\,a_{f+2},\,a_{f+3}\ldots a_m]^q = P'[s(n-fq)\,;\,a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_{m-f}]^q$

2) $P'[sn\,;\,a_{-f},\,a_{-f+1},\ldots\ldots a_m]^q = P'[s(n+(f+1)q);\,a_1,\,a_2,\ldots a_{m+f+1}]^q$

**3)** $P'[sn;a_{f+1},a_{f+2},\ldots a_{r_1},a_{p_2+1},a_{p_2+2}\ldots a_{r_2},\ldots a_{p_h+1}\ldots a_{r_h}]^q =$

$= P'[s(n-fq);\,a_1,\,a_2\ldots a_{r_1-f},\,a_{p_2+1-f},\ldots a_{r_h-f}]^q$

**4)** $P'[sn;a_{-f},a_{-f+1},\ldots a_{r_1},a_{p_2+1},a_{p_2+2}\ldots a_{r_2},\ldots a_{p_h+1}\ldots a_{r_h}]^q =$

$= P'[s(n+(f+1)q);a_1,a_2\ldots a_{r_1+f+1},a_{p_2+1+f},a_{p_2+2+f}\ldots a_{r_h+f}]^q$

Setzt man nun nach 3 $n-fg=n_1$, $r_1-f=s_1$, $r_2-f=s_2\ldots r_h-f=s_h$ und $p_2-f=t_2$, $p_3-f=t_3\ldots p_h-f=t_h$, so ergibt sich aus Nro. 9 §. 3 folgende Darstellung:

**5)** $P'[sn;\,a_{f+1},\,a_{f+2},\,a_{r+1},\,a_{p_2+1},\,a_{p_2+2}\ldots a_{r_2},\ldots a_{p_h+1},\ldots a_{r_h}]^q$

$$= \sum_{x=o}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^{y_2+y_3+\ldots y_h} \frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}\,1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}\,1^{y_2|1}\,1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}} \times \frac{(n_1-z_1\,s_1-z_2\,s_2\ldots z_h\,s_h-y_2\,t_2\ldots y_h\,t_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \right)$$

Hierin gelten dieselben Bedingungsgleichungen, die zu Nro. 9 §. 3 angegeben wurden. Setzt man nach 4

$n+(f+1)q=n_1$, $r_1+f+1=s_1$, $r_2+f+1=s_2\ldots r_h+f+1=s_h$ und

$p_2+f+1=t_2$, $p_3+f+1=t_3\ldots p_h+f+1=t_4$,

so ist aus 9 §. 3

**6)** $P'[sn;\,a_{-f},\,a_{-f+1}\ldots a_{r_1},\,a_{p_2+1},a_{p_2+2}\ldots a_{r_2},\ldots a_{p_h+1},a_{p_h+2}\ldots a_{r_h}]^q$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^{y_2+y_3+\ldots y_h} \frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}\,1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}\,1^{y_2\,1}\,1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}} \times \frac{(n_1-z_1\,s_1-z_2\,s_2\ldots,z_h\,s_h-y_2\,t_2-y_3\,t_3\ldots-y_h\,f_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \right)$$

Auch hier gelten die nämlichen Bedingungsgleichungen.

Die Gleichung 9 §. 3 und die Gleichungen dieses §. gewinnen dadurch besonders an Anwendbarkeit, dafs die Werthe der Stellenzahlen $p_2$, $p_3$, . . . $p_h$ und $r_1$, $r_2$, $r_3$ . . . $r_h$ unter sich nicht in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, sondern unabhängig von einander sind, und willkührlich angenommen, oder in jeden beliebigen Zusammenhang gebracht werden können. Geschieht diefs, so können gar mannigfaltige Folgerungen aus diesen Gleichungen gezogen werden. Diefs wird sich an folgenden Fällen zeigen.

Setzt man nämlich

$p_2 = p_3 = p_4 = \ldots p_h = 0$ und $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots r_h = r$

so erhalten alle Elementen-Reihen in 9 §. 3 gleich viele Elemente und es entstehen h Elementen-Reihen. Werden nun in dem zugehörigen Zahlenausdrucke die erforderlichen Veränderungen gemacht, geordnet und die zusammengehörigen Ausdrücke unter sich verbunden, so ergibt sich hieraus folgende Darstellung

$$7)\ P'[sn;\ a_1, a_2, a_3 \ldots a_r,\ b_1, b_2, b_3 \ldots b_r,\ c_1, c_2 \ldots c_r, \ldots h_1, h_2 \ldots h_r]^q =$$

$$= \frac{1}{1^{q-1|-1}} \Big( (1 + q(h-1) + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} (h-1)^2 + \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} (h-1)^3 \ldots\ldots) (n-1)^{q-1|-1}$$

$$- q.h\,(1 + \frac{q-1}{1} (h-1) + \frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} (h-1)^2 \ldots\ldots) (n-r-1)^{q-1|-1}$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^2 (1 + \frac{q-2}{1} (h-1) + \frac{(q-2)^{2|-1}}{1^{2|1}} (h-1)^2 \ldots\ldots) (n-2r-1)^{q-1|-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \Big)$$

$$= \frac{h^q}{1^{q-1|1}} \Big( (n-1)^{q-1|-1} - \frac{q}{1} (n-r-1)^{q-1|-1} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|}} (n-2r-1)^{q-1|-1} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} (n-3r-1)^{q-1|-1} \ldots\ldots \Big)$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergehen sollte.

Andere Anwendungen, welche sich aus den Gleichungen dieses §. ergeben, sind folgende

Werden nämlich die zu den Gleichungen 5 und 6 angedeuteten Werthe eingeführt, so ergibt sich für die in 3 angezeigte Gruppenanzahl folgende entwickelte Darstellung, wenn die gehörigen Reductionen gemacht werden

$$8)\ A = \frac{(n-fq-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1^{q-1|1}}\Big(\begin{matrix}(n-[q-1]f-r_1-1)^{q-1|-1} & -(n-[q-1]f-p_2-1)^{q-1|-1}\\ (n-[q-1]f-r_2-1)^{q-1|-1} & -(n-[q-1]f-p_3-1)^{q-1|-1}\\ \vdots & \vdots\\ (n-[q-1]f-r_h-1)^{q-1|-1} & -(n-[q-1]f-p_h-1)^{q-1|-1}\end{matrix}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}1^{q-1,1}}\Big((n-[q-2]f-2r_1-1)^{q-1|-1}+2\Big|\begin{matrix}(n-[q-2]f-r_1-r_2-1)^{q-1|-1} & +\frac{2.1}{1.2}(n-[q-2]f-2r_2-1)^{q-1|-1}\\ (n-[q-2]f-r_1-r_3-1)^{q-1|-1} & +2\Big|\begin{matrix}(n-]q-2]f-r_2-r_3-1)^{q-1|-1}\\ \vdots\\ -(n-[q-2]f-r_2-p_h-1)^{q-1|-1}\\ \vdots\end{matrix}\\ \vdots & \\ +(n-[q-2]f-r_1-r_h-1)^{q-1|-1} & \\ -(n-[q-2]f-r_1-p_2-1)^{q-1|-1} & \\ -(n-[q-2]f-r_1-p_3-1)^{q-1|-1} & \\ \vdots & \\ -(n-[q-2]f-r_1-p_h-1)^{q-1|-1} & \end{matrix}\Big|\ +\frac{2.1}{1.2}(n-[q-2]f_1-2p_h-1)^{q-11-1}\Big)$$

$$\vdots$$

**oder in Zeichen**

$$9)\ A=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=m}(-)^{y_2+y_3+\ldots y_h}\frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}1^{y_2|1}1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}}\times$$

$$\times\frac{(n-[q-m]f-z_1r_1-z_2r_2\ldots\ldots z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3\ldots-y_hp_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\Big)$$

**Hierin ist allmälig 0, 1, 2, . . . q statt x zu setzen und für jeden einzelnen Werth von x nach dem zweiten $\Sigma$**

$$x = m = y_2 + y_3 + y_4 + \ldots y_h + z_1 + z_2 + \ldots z_h$$

**beizubehalten. Im übrigen gelten die oben angegebenen Gesetze.**

**Werden die gleichen Bemerkungen auf die Darstellungen 4 und 6 angewendet, so ergibt sich, wenn die erste Reihe mit dem Elemente $a_{-f+1}$ statt mit $a_{-f}$ beginnt.**

$$10)P'[sn;\ a_{-f+1},a_{-f+2},..a_{r_1},a_{p_2+1},a_{p_2+2}...a_{r_2},...a_{p_h+1},a_{p_h+2},..a_{r_h}]^q$$

$$=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=m}(-)^{y_2+y_3+...y_h}\frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}....1^{z_h|1}1^{y_2|1}1^{y_3|1}....1^{y_h1}}\right.$$

$$\left.\times\frac{(n+[q+m]f-z_1r_1-z_2r_2...z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3-....-y_hp_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

Eine weitere Anwendung, welche die bisher gefundenen Resultate zulassen, besteht darin, dafs sie dienen, die Zahlenausdrücke für die Gruppen der verschiedenen Summen, welche einer und derselben Classe zugehören, darzustellen. Um diefs zu zeigen, betrachten wir den einfachsten Fall, der in §. 1 Nro. 6 angegeben wurde. Wird dort allmälig

$$q,\ q+1,\ q+2,\ q+3,\ ...\ r+q,\ r+q+1\ ...\ 2r+q,\ 2r+q+1\ ...\ n$$

statt n eingeführt, so entstehen die Anzahlen der Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $q^{ten}$ Classe zu den genannten Summen. Diefs führt zu folgender Darstellung

$$\frac{1}{1^{q-1|1}}\Big(\begin{array}{ll}(q-1)^{q-1|-1} & \\ q^{q-1|-1} & \\ (q+1)^{q-1|-1} & \\ (q+2)^{q-1|-1} & \\ \vdots & \\ (r+q-1)^{q-1|-1} & -\ q\ (q-1)^{q-1|-1} \\ (r+q)^{q-1|-1} & -\ q\ q^{q-1|-1} \\ \vdots & \vdots \\ (2r+q-1)^{q-1|-1} & -\ q\ (r+q-1)^{q-1|-1}\ +\ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-1)^{q-1|-1} \\ \vdots & \vdots \\ (n-1)^{q-1|-1} & -\ q\ (n-r-1)^{q-1|-1}\ +\ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2r-1)^{q-1|-1}\ ....\end{array}\Big)$$

Werden die hier erhaltenen Vertikalreihen summirt, so ergibt sich die Bestimmung der fraglichen Gruppenanzahl leicht. Bezeichnen wir nun die Anzahl dieser Gruppen durch den Ausdruck

$$\sum_{n=q}^{n=n}P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ ...\ a_r]^q$$

so finden wir

$$11)\ \sum_{n=q}^{n=n} P'[sn;\ a_1, a_2, a_3 \ . \ . \ . \ a_r]^q =$$

$$= \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} - q.\frac{(n-r)^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{(n-2r)^{q|-1}}{1^{q|1}} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\frac{(n-3r)^{q|-1}}{1^{q|1}} + \ . \ . \ . \ . \ .$$

Dieselbe Methode führt bei den übrigen Fällen leicht zum Ziele. Deswegen ergibt sich ganz allgemein aus 9 §. 3.

$$12)\sum_{n=q}^{n=n} P'[sn;\ a_1, a_2, a_3, \ . \ . \ . \ . \ a_{r_1}$$

$$a_{p_2+1}, a_{p_2+2}, \ . \ . \ . \ . \ a_{r_2}$$

$$a_{p_3+1}, a_{p_3+2}, \ . \ . \ . \ . \ a_{r_3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{p_h+1}, a_{p_h+2}, \ . \ . \ . \ . \ a_{r_h}]^q =$$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^{y_2+y_3+\ldots y_h} \frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}1^{y_2|1}1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}} \right.$$

$$\left. \times \frac{(n-z_1r_1-z_2r_2- \ . \ . \ . \ z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3 \ . \ . \ . \ - y_hp_h)^{q|-1}}{1^{q|1}} \right)$$

Die Bedingungsgleichungen, welche oben angegeben wurden, gelten auch hier. Dieselbe Methode läfst sich leicht auf die in 5 — 10 gefundenen Gleichungen und alle hieher gehörigen Fälle ausdehnen.

## §. 5.

Die combinatorische Analysis gewinnt aus den bisher aufgefundenen Resultaten eine nicht unbedeutende Ausbeute, indem sie mit ihrer Hülfe eine besondere Classe von Polynomien potenziren lehrt. Hieher gehören alle Polynomien mit beschränkter, oder auf irgend eine Weise unterbrochener Gliederanzahl. Es ist bekanntlich

$$(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ . \ . \ . \ . \ )^q =$$

$$= P'sq^qx^q + P's(q+1)^qx^{q+1} + P's(q+2)^qx^{q+2} + P's(q+3)^qx^{q+3} +$$

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ . \ . \ . \ . \ )$$

wenn

$$P'sq^q,\ P's(q+1)^q,\ P's(q+2)^q \ . \ . \ . \ .$$

die Versetzungen mit Wiederholungen in der $q^{ten}$ Classe zu den verschiedenen Summen, der Kürze wegen, bezeichnen.

Ist die Gliederanzahl des Polynomiums beschränkt, so ergibt sich hieraus unmittelbar

$$1)\ (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots\ldots a_rx^r)^q =$$
$$= P's q^q x^q + P's(q+1)^q x^{q+1} + P's(q+2)^q x^{q+2} + \ldots\ldots P's(qr)^q x^{qr}$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ \ldots\ldots a_r)$$

Die Summen der Versetzungen mit Wiederholungen und Exponenten von x erheben sich bis qr. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots . a_r = 1$, so geht die Gleichung 1 in folgende über

$$2)\ (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots x^r)^q =$$
$$= P's[q]^q x^q + P's[q+1]^q x^{q+1} + P's[q+2]^q x^{q+2} + \ldots\ldots P's[qr]^q x^{qr}$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots a_r)$$

Die Werthe für

$$P's[q]^q,\ P's[q+1]^q,\ P's[q+2]^q,\ \ldots\ldots$$

sind in §. 1 Nro. 6 angegeben.

Ist die Gliederanzahl des Polynomiums beschränkt und unterbrochen, so ist

$$3)\ (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots a_hx^h + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} \ldots a_px^p)^q =$$
$$= P's q^q x^q + P's(q+1)^q x^{q+1} + P's(q+2)^q x^{q+2} \ldots\ldots P's(pq)^q x^{pq}$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots a_h,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots\ldots a_p)$$

Wird

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots a_h = a_{k+1} = \ldots a_p = 1,$$

so geht die vorstehende Gleichung in folgende über

$$4)\ (x + x^2 + x^3 + \ldots x^h + x^{k+1} + x^{k+2} \ldots x^p)^q =$$
$$P's[q]^q x^q + P's[q+1]^q x^{q+1} + P's[q+2]^q x^{q+2} + \ldots P's[pq]^q x^{pq}$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots a_h,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots a_p)$$

Die Werthe für die Vorzahlen der Potenzen von x in der entwickelten Darstellung ergeben sich aus §. 3, 5 oder 6.

Eben so ist

$$5)(a_1x+a_2x^2+..a_{r_1}x^{r_1}+a_{p_2+1}x^{p_2+1}..a_{r_2}x^{r_2}..a_{p_h+1}x^{p_h+1}..a_{r_h}x^{p_h})^q=$$
$$P's q^q x^q + P's(q+1)^q x^{q+1} + P's(q+2)^q x^{q+2} .. P's(r_h q)^q x^{qr_h}$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_{r_1}, a_{p_2+1}, a_{p_2+2} \ldots a_{r_2}, \ldots a_{p_h+1}, a_{p_h+2}, \ldots a_{r_h})$$

und

6) $(x^1+x^2+\ldots.x^{r_1}+x^{p_2+1}\ldots.x^{r_2}\ldots x^{p_h+1}+x^{p_h+2}\ldots.x^{r_h})^q=$
$=P's[q]^q x^q+P's[q+1]^q x^{q+1}+P's[q+2]^q x^{q+2}..P's[qr_h]^q x^{qr_h}$
$(a_1, a_2, a_3 \ldots a_{r_1}, a_{p_2+1}, a_{p_2+2}, \ldots a_{r_2}, \ldots a_{p_h+1}, a_{p_h+2} \ldots a_{r_h})$

Die Werthe für diese allgemeine Darstellung ergeben sich aus der Gleichung 9 §. 3.

Mit Hülfe der in §. 1—4 gefundenen Sätze lassen sich Anwendungen auf die Erhebung der Polynomien in negative Potenzen machen. Es ist bekanntlich (s. m. Differenzial und Differenzen-Calcul Pg. 96 Nro. 119 u. ff.)

7) $$\frac{1}{(1-a_1x-a_2x^2-a_3x^3\ldots.)}q = 1 + q\,P's1^1x + q\,P's2^1 \left|\begin{matrix} x^2+q\,P's3^1 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's3^2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x^3+\ldots \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's3^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1}P's3^3 \end{matrix}\right|$$

also auch $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$

8) $$\frac{1}{(1-a_1x-a_2x^2-\ldots.a_rx^r)}q = 1+q\,P's1^1x+q\,P's2^1 \left|\begin{matrix} x^2+q\,P's3^1 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's3^2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x^3+qP's4^1 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's4^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1}P's4^3 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x^4\ldots \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's4^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1}P's4^3 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{4|1}P's4^4 \end{matrix}\right|$$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_r)$

und allgemein

9) $$\frac{1}{(1-a_1x\ldots-a_rx^{r_1}-a_{p_2+1}x^{a_{p_2+1}}\ldots-a_{r_2}x^{r_2}\ldots-a_{p_h+1}x^{a_{p_h+1}}\ldots-a_{r_h}x^{r_h})^q}$$
$$= 1+q\,P's1^1x+q\,P's2^1 \left|\begin{matrix} x^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's2^2 \end{matrix}\right| + qP's3^1 \left|\begin{matrix} x^3 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's3^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1}P's3^3 \end{matrix}\right| + q\,P's4^1 \left|\begin{matrix} x^4+\ldots. \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1}P's4^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1}P's4^3 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{4|1}P's4^4 \end{matrix}\right|$$

$(a_1, a_2, \ldots a_{r_1}, a_{p_2+1}, a_{p_2+2}, \ldots a_{r_2}, \ldots a_{p_h+1}, \ldots a_{r_h})$

Wird

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_{r_1} = a_{p_2+1} = \ldots a_{p_h+1} = \ldots = a_{r_h} = 1 \text{ gesetzt, so ist}$$

$$^{10)}\frac{1}{(1-x-x^2-x^3 \ldots -x^{r_1}-x^{p_2+1}-x^{p_2+2} \ldots -x^{r_2}- \ldots -x^{p_h+1}- \ldots -x^{r_h})^q} =$$

$$= 1 + q\,P's[1]^1 x + q\,P's[2]^1 \left|\begin{matrix} x^2 + q\,P's[3]^1 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1} P's[3]^2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x^3 + q\,P's[4]^1 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{2|1} P's[4]^2 \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{3|1} P's[4]^3 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x^4 + \ldots \\ \\ \\ \left(\frac{q}{1}\right)^{4|1} P's[4]^4 \end{matrix}\right|$$

$$\left(\frac{q}{1}\right)^{2|1} P's[2]^2$$

$$(a_1, a_2, \ldots a_{r_1}, a_{p_2+1}, a_{p_2+2}, \ldots a_{r_2}, \ldots a_{p_h+1}, \ldots a_{r_n})$$

Die hier angezeigten Vorzahlen von x sind nach den, in §. 1 — 3 gefundenen, Gleichungen zu entwickeln.

Durch diese Hülfsmittel läfst sich auch

$$\frac{(b_1+b_2x+..b_{s_1}x^{s_1-1}+b_{t_2+1}x^{t}+b_{t_2+2}x^{t_2+1}...b_{s_2}x^{s_2-1}...b_{t_k+1}x^{t_k}..b_{s_k}x^{s_k-1})^n}{(1-a_1x-a_2x^2 \ldots -a_{r_1}x^{r_1}-a_{p_2+1}x^{p_2+1}-\ldots -a_{r_2}x^{r_2}- \ldots -a_{p_h}x^{p_h} \ldots -a_{r_h}x^{r_h})^q}$$

in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln, wenn §. 71 u. ff. m. Diff. Calculs berücksichtigt wird.

Es zeigt sich, von welcher Anwendung die in §. 1 — 4 aufgefundenen Gleichungen in der Analysis sind, denn sie geben die Entwicklung einer grofsen Reihe von Polynomien, die bisher in diesem Zweige der Mathematik, so viel uns bekannt ist, nicht berührt wurden, und die eine Stelle in einer Darstellung der Analysis einnehmen, sie mag auf combinatorischem, oder analytischem Wege gegeben werden.

Die in diesem §. gefundenen Resultate sind besonders auch in der Beziehung wichtig, als sie einen Weg zur Aufsuchung neuer Entwicklungen eröffnen. Die Gleichungen 2, 4, 6 etc. zeigen nämlich, wie die Gruppenanzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen zur Darstellung der Vorzahlen der Polynomien benützt werden können. Hiebei wurden die Gruppenanzahlen

als bekannt angenommen, und der Uebergang von ihnen auf die Polynomien gemacht. Nun können wir den umgekehrten Weg einschlagen, können die entwickelte Darstellung der Polynomien als bekannt annehmen, oder irgend ein Mittel zu ihrer Entwicklung feststellen und dann auf die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen übergehen. Beide Wege haben gleichen Zweck und lösen dasselbe Problem. Sie sind nur in der Ausführung verschieden. Wir wollen den ersten bisher benützten Weg den combinatorischen, den letztern, den analytischen Weg nennen, und diesen weiter verfolgen.

Die Art, wie diesr weiter verfolgt werden wird, besteht darin, dafs ein Polynomium aus der ordnenden Gröfse x gebildet wird, deren Exponenten mit den Stellenzahlen der Elemente übereinstimmen, woraus die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen erzeugt werden. Die Ausbeute, welche wir auf diesem Weg gewinnen, ist nicht unbedeutend, da die Polynomien leicht geformt und behandelt werden können. Wir wenden uns nun zur Untersuchung einzelner Fälle und stellen die einzelnen Probleme unter einer andern Form dar.

## §. 6.

**g Elementenreihen sind gegeben, von denen jede k Elemente zählt, und m Elementen-Reihen, von denen jede (k-h) Elemente zählt. Aus den Elementen dieser Reihen sollen die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe gebildet werden. Wie grofs ist ihre Gruppenanzahl?**

**Dieses Problem stellt sich unter folgender Form dar**

$$1)\ A = P'[sn;\ \begin{matrix} a_1, a_2, \ldots a_h, a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots a_k \\ b_1, b_2, \ldots b_h, b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots b_k \\ \vdots\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ldots\ \vdots \\ g_1, g_2, \ldots g_h, g_{h+1}, g_{h+2}, \ldots g_k \end{matrix}\ \begin{matrix} h_{h+1}, h_{h+2}, \ldots h_k \\ i_{h+1}, i_{h+2}, \ldots i_k \\ \vdots\ \vdots\ \ldots\ \vdots \\ m_{h+1}, m_{h+2}, \ldots m_k \end{matrix}]^q$$

Wird für jede, in diesem Ausdrucke aufgeführte, Elementen-Reihe ein Polynomium von der entsprechenden Gliederanzahl angenommen, dann die Elemente dieser Reihe untereinander und der Einheit gleich gesetzt, wie in §. 5 geschah, oder wird ein Polynomium aus der ordnenden Gröfse gebildet, deren Exponenten mit den Stellenzahlen der Elemente der vorstehenden Reihen zusammenfallen, wird dann das hiedurch entstandene Polynomium entwickelt und die zu $x^n$ gehörige Vorzahl angegeben, so ist das vorgelegte Problem gelöfst. Es entsteht

$$Q^q=(gx+gx^2+gx^3+\ldots.gx^h+(g+m)x^{h+1}+(g+m)x^{h+2}+\ldots.(g+m)x^k)^q$$

$$=\left(g\frac{x-x^{h+1}}{1-x}+(g+m)\frac{x^{h+1}-x^{k+1}}{1-x}\right)^q=\frac{x^q}{(1-x)^q}(g+mx^h-[g+m]x^k)^q$$

Nun ist

$$2)\quad \frac{x^q}{(1-x)^q}=x^q+\frac{q^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}x^{q+1}+\frac{(q+1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}x^{q+2}+\frac{(q+2)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}x^{q+3}+\ldots.$$

und

$$(g+mx^h-(g+m)x^k)^q=(g+[mx^h-(g+m)x^k])^q=g^q+qg^{q-1}(mx^h-[g+m]x^k)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}g^{q-2}(mx^h-[g+m]x^k)^2$$
$$+\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}g^{q-3}(mx^h-[g+m]x^k)^3$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

$$=g^q+qg^{q-1}(mx^h-[g+m]x^k)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}g^{q-2}(m^2x^{2h}-2m[g+m]x^{h+k}+[g+m]^2x^{2k})$$
$$+\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}g^{q-3}(m^3x^{3h}-3m^2[g+m]x^{2h+k}+\frac{3.2}{1.2}m[g+m]^2x^{h+2k}-[g+m]^3x^{3k})$$
$$+\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}g^{q-4}(m^4x^{4h}-4m^3[g+m]x^{3h+k}+\frac{4.3}{1.2}m^2[g+m]^2x^{2h+2k}-\frac{4.3.2}{1.2.3}m[g+m]^3x^{h+3k}+[g+m]^4x^{4k})$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

Werden die eben erhaltenen Ausdrücke mit 2 vervielfacht, wird das hiedurch entstehende Resultat nach den Potenzen von x geordnet und die Vorzahl von $x^n$ hervorgehoben, so ergibt sich für die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus den oben in 1 angegebenen Elementen-Reihen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe

$$3)\ A=g^q\frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}+\frac{q}{1}\frac{g^{q-1}}{1^{q-1|1}}[m(n-h-1)^{q-1|-1}-(g+m)\ (n-k-1)^{q-1|-1}]$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{g^{q-2}}{1^{q-1|1}}[m^2(n-2h-1)^{q-1|-1}-2m(g+m)(n-h-k-1)^{q-1|-1}+(g+m)^2(n-2k-1)^{q-1|-1}]$$

$$+\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\frac{g^{q-3}}{1^{q-1|1}}[m^3(n-3h-1)^{q-1|-1}-3m^2(g+m)(n-2h-k-1)^{q-1|-1}+3m(g+m)^2(n-h-2k-1)^{q-1|-1}$$

$$-(g+m)^3(n-3k-1)^{q-1|-1}]$$

⋮ ⋮ ⋮

oder

$$4)\ A=\sum_{x=0}^{x=q}g^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{x+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\ m^y(g+m)^z\ \frac{(n-yh-zk-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

Hiebei gilt die Bedingungsgleichung

$$x=y+z=0,1,2,3,4,\ .\ .\ .\ .$$

ferner müssen für die einzelnen Werthe von $y+z$ die verschiedenen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen zur zweiten Classe aus den betreffenden Elementen gebildet werden, wie diefs bei Nro. 6 §. 2, Pg. 9 geschehen ist.

Die vorstehende Gleichung ist mancher Anwendung fähig. Sie gibt die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus g Elementen-Reihen, von denen jede k Elemente zählt, sehr leicht, wenn $m=0$ gesetzt wird. Es ist

$$5)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_k,\ b_1,\ b_2,\ .\ .\ .\ b_k\ .\ .\ .\ g_1,\ g_2,\ .\ .\ .\ g_k]^q=$$

$$=\frac{g^q}{1^{q-1|1}}\left((n-1)^{q-1|-1}-\frac{q}{1}(n-k-1)^{q-1|-1}+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(n-2k-1)^{q-1|-1}-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(n-3k-1)^{q-1|-1}\ldots\right)$$

Dieselbe Gleichung wurde Nro. 7 §. 4, Pg. 16 schon auf anderem Wege gefunden. Wird $k=\infty$, $g=1$ und $m=0$ gesetzt, so entsteht die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus einer vollständigen Elementen-Reihe zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe. Es ist

$$6)\ P'[sn;\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ .\ ]^q=\frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}$$

wie bekannt. Ist $g=1$ und $m=0$, so entsteht die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus k Elementen einer Reihe zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe. Es ist

$$7)\ P'[sn;\ a_1, a_2, \ldots a_k]^q = \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1}\frac{(n-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{(n-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \ldots$$

**Dieſs ist die in 6 Nro. 1, Pg. 5 dargestellte Gleichung.**

**Das oben unter 1 gegebene Problem läſst auch folgende Form zu**

$$8)\ A_1 = P'[sn;\ \begin{matrix} a_1, & a_2, \ldots a_h, & a_{h+1}, & a_{h+2}, \ldots a_k \\ b_1, & b_2, \ldots b_h, & b_{h+1}, & b_{h+2}, \ldots b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ g_1, & g_2, \ldots g_h, & g_{h+1}, & g_{h+2}, \ldots g_k \\ h_1, & h_2, \ldots h_h & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_1, & m_2, \ldots m_h & & \end{matrix}]^q$$

**Um die Gruppenanzahl für 8 zu bestimmen, wird die Entwicklung des Binomiums**

$$Q^q = [(g+m)x + (g+m)x^2 \ldots (g+m)x^h + gx^{h+1} + gx^{h+2} \ldots gx^k]^q$$
$$= \left((g+m)\frac{x-x^{h+1}}{1-x} + g\frac{x^{h+1}-x^{k+1}}{1-x}\right)^q = \left(\frac{x}{1-x}\right)^q [(g+m) - mx^h - gx^k]^q$$

**nöthig. Es ergibt sich**

$$Q^q = \frac{x^q}{(1-x)^q}[g+m-(mx^h+gx^k)]^q = \left(\frac{x}{1-x}\right)^q [(g+m)^q - \frac{q}{1}(g+m)^{q-1}(mx^h+gx^k)$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(g+m)^{q-2}(mx^h+gx^k)^2$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(g+m)^{q-3}(mx^h+gx^k)^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots\ )$$

**Werden die nöthigen Entwicklungen gemacht und auf die unter 2 gewonnene Reihe Rücksicht genommen, so ergibt sich leicht mit Hülfe der Bemerkung, dafs (g+m) in der Darstellung 3 an die Stelle von g, g an die Stelle von (g+m) getreten und ein anderer Zeichenwechsel zu beachten ist, folgende Bestimmung für die fragliche Gruppenanzahl**

$$9)\ A_1 = (g+m)^q\frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1}(g+m)^{q-1}\left(m\frac{(n-h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + g\frac{(n-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(g+m)^{q-2}\left(m^2\frac{(n-2h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + 2mg\frac{(n-h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + g^2\frac{(n-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(g+m)^{q-3}\left(m^3\frac{(n-3h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + 3m^2g\frac{(n-2h-k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + 3mg^2\frac{(n-h-2k-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} \ldots\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

oder

$$10)\ A_1=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x(g+m)^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}.1^{z|1}}\,m^y g^z\frac{(n-yh-zk-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

In dieser Gleichung gelten dieselben Bedingungen, wie die zu Nro. 4 angegebenen. Die unter 3 und 9 gefundenen Ausdrücke lassen sich noch weiter benützen. Werden in ihnen statt n allmälig die Werthe q, q+1, q+2, q+3, .... n eingeführt, so ergeben sich hiedurch die Ausdrücke für die Gruppenanzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen aus den bezeichneten Elementen-Reihen zu den Summen q, q+1, q+2, q+3, .... n in der $q^{ten}$ Classe. Hiebei ist das §. 4, Pg. 18 gezeigte Verfahren anzuwenden.

Wird die oben gewählte Bezeichnungsweise beibehalten, so ergibt sich hieraus

$$11)\ \sum_{n=q}^{n=n}P'[sn;\ \begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3, & \ldots. & a_h, & a_{h+1}, & \ldots. & a_k\\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots. & b_h, & b_{h+1}, & \ldots. & b_k\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_1, & g_2, & g_3, & \ldots. & g_h, & g_{h+1}, & \ldots. & g_k\\ & & & & & h_{h+1}, & \ldots. & h_k\\ & & & & & \vdots & & \vdots\\ & & & & & m_{h+1}, & \ldots. & m_k\end{matrix}]^q$$

$$=g^q\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}+\frac{q}{1}g^{q-1}\left(m\frac{(n-h)^{q|-1}}{1^{q|1}}-(g+m)\frac{(n-k)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}g^{q-2}\left(m^2\frac{(n-2h)^{q|-1}}{1^{q|1}}-2m(g+m)\frac{(n-h-k)^{q|-1}}{1^{q|1}}+(g+m)^2\frac{(n-2k)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$+\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}g^{q-3}\left(m^3\frac{(n-3h)^{q|-1}}{1^{q|1}}-3m^2(g+m)\frac{(n-2h-1)^{q|-1}}{1^{q|1}}+\frac{3.2}{1.2}m(g+m)^2\frac{(n-h-2k)^{q|-1}}{1^{q|1}}+\ldots.\right)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

Aus 9 ergibt sich

$$12)\ \sum_{n=q}^{n=n}P'[sn;\ \begin{matrix}a_1, & a_2, & \ldots. & a_h, & a_{h+1}, & \ldots. & a_k\\ b_1, & b_2, & \ldots. & b_h, & b_{h+1}, & \ldots. & b_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_1, & g_2, & \ldots. & g_h, & g_{h+1}, & \ldots. & g_k\\ h_1, & h_2, & \ldots. & h_h & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ m_1, & m_2, & \ldots. & m_h & & & \end{matrix}]^q=$$

$$= (g+m)^q \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} - \frac{q}{1}(g+m)^{q-1}\left(m\frac{(n-h)^{q|-1}}{1^{q|1}} + g\frac{(n-k)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(g+m)^{q-2}\left(m^2\frac{(n-2h)^{q|-1}}{1^{q|1}} + 2mg\frac{(n-h-k)^{q|-1}}{1^{q|1}} + g^2\frac{(n-2k)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(g+m)^{q-3}\left(m^3\frac{(n-3h)^{q|-1}}{1^{q|1}} + 3m^2g\frac{(n-2h-k)^{q|-1}}{1^{q|1}} + 3mg^2\frac{(n-h-2k)^{q|-1}}{1^{q|1}} + g^3\frac{(n-3k)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**Allgemeiner stellen sich diese Gesetze auf folgende Weise dar**

$$13)\ \sum_{s+1}^{n} A = \sum_{x=0}^{x=q} g^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}m^y(g+m)^z\frac{(n-yh-zk)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$-\sum_{x=0}^{x=q} g^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}m^y(g+m)^z\frac{(s-yh-zk)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$14)\ \sum_{s+1}^{n} A_1 = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x(g+m)^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}m^y g^z\frac{(n-yh-zk)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$-\sum_{x=0}^{x=}(-)^x(g+m)^{q-x}\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}m^y g^z\frac{(s-yh-zk)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

**In beiden Darstellungen gelten die zu 4 angegebenen Bedingungsgleichungen. Unter $\Sigma_{s+1}^{n}$ A soll der Inbegriff der Gruppenanzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen der Summen s+1, s+2, s+3,....n in der $q^{ten}$ Classe aus den unter 1 angegebenen Elementen-Reihen, unter $\Sigma_{s+1}^{n}$ $A_1$ aber dieselben Gruppenanzahlen aus den unter 8 angegebenen Elementen-Reihen verstanden werden.**

**Wird s+1=q in 13 oder 14 gesetzt, so ergeben sich die unter 11 und 12 gegebenen Darstellungen.**

## §. 7.

**Es sind h Elementen-Reihen gegeben, von denen die erste r Elemente zählt, die zweite ein Element weniger, als die erste, die dritte ein Element weniger, als die zweite u. s. f. Aus den Elementen dieser Reihen werden die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe gebildet. Wie grofs ist ihre Gruppenanzahl?**

**Dieses Problem stellt sich unter folgender Form dar:**

$$1)\ A_1 = P'[sn;\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_r$$
$$b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_r$$
$$c_2,\ \ldots\ c_r$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$h_h,\ h_{h+1} \ldots . h_r]^q$$

**Wird für jede Elementen-Reihe dieses Ausdrucks ein Polynomium von der entsprechenden Gliederanzahl angenommen und werden dann die Stellenzahlen auf Exponenten übergetragen, so gewinnt man folgende Darstellung**

$$Q^q = (x+x^2+x^3+ \ldots x^r+x^2+x^3 \ldots x^r+x^3+x^4+ \ldots x^r \ldots +x^h+x^{h+1} \ldots x^r)^q$$
$$= \left(\frac{x+x^2+x^3+ \ldots x^h-hx^{r+1}}{1-x}\right)^q = \left(\frac{x}{1-x}\right)^q \left(\frac{1-x^h}{1-x} - hx^r\right)^q$$
$$= \frac{x^q}{(1-x)^q}\left(\frac{1-x^h-hx^r+hx^{r+1}}{1-x}\right)^q = \frac{x^q}{(1-x)^{2q}}\left(1-(x^h+hx^r-hx^{r+1})\right)^q$$

**Nun ist**

$$2)\ \frac{x^q}{(1-x)^{2q}} = x^q + \frac{(2q)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+1} + \frac{(2q+1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1\,1}}x^{q+2} + \frac{(2q+2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + \ldots\ldots$$

**Wird diese Entwicklung mit**

$$[1-(x^h+h(x^r-x^{r+1}))]^q = 1 - \frac{q}{1}(x^h+h(x^r-x^{r+1}))$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(x^h+h(x^r-x^{r+1}))^2$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(x^h+h(n^r-x^{r+1}))^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$= 1 - \frac{q}{1}(x^h+h(x^r-x^{r+1}))$$
$$+ q^{2|-1}\ (x^{2h}+2h(x^{r+h}-x^{h+r+1})+h^2(x^r-x^{r+1})^2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

**vervielfacht, und dann die Form der Vorzahl von $x^n$ bestimmt, so ist damit die gesuchte Gruppenanzahl gefunden. Hiernach wird seyn**

$$3)\,A_1=\frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big((n+q-1)^{2q-1|-1}-\frac{q}{1}\Big((n+q-h-1)^{2q-1|-1}+h\begin{vmatrix}(n+q-r-1)^{2q-1|-1}\\-(n+q-r-2)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+q-2h-1)^{2q-1|-1}+2h\begin{vmatrix}(n+q-h-r-1)^{2q-1|-1}\\-(n+q-h-r-2)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}+h^2\begin{vmatrix}(n+q-2r-1)^{2q-1|-1}\\-2(n+q-2r-2)^{2q-1|-1}\\+(n+q-2r-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big((n+q-3h-1)^{2q-1|-1}+3h\begin{vmatrix}(n+q-2h-r-1)^{2q-1|-1}\\-(n+q-2h-r-2)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}+\frac{3.2}{1.2}h^2\begin{vmatrix}(n+q-h-2r-1)^{2q-1|-1}\\-2(n+q-h-2r-2)^{2q-1|-1}\\+(n+q-h-2r-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}+h^3\begin{vmatrix}(n+q-3r-1)^{2q-1|-1}\\-3(n+q-3r-2)^{2q-1|-1}\\+3(n+q-3r-3)^{2q-1|-1}\\-(n+q-3r-4)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

oder

$$4)\,A_1=\frac{1}{1^{2q-1|1}}\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\,\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\,\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w,1}1^{y|1}1^{z|1}}\,h^{y+z}\,(n+q-wh-yr-z(r+1)-1)^{2q-1|-1}\Big)$$

w bezieht sich auf h, y auf r und z auf r+1. Die übrigen Bedingungen für diese Gleichung fallen mit den zu Nro. 6 §. 3, Pg. 12 angegebenen zusammen.

Man erkennt leicht, dafs die Glieder, welche in diesen Ausdrücken vorkommen, die Unterschiede von Fakultäten sind. Die Gleichung 3 läfst sich daher auch auf folgende Weise darstellen,

$$5)\;A_1=\frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}-q\Big(\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+h\triangle\frac{(n+q-r-2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+2h\triangle\frac{(n+q-h-r-2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+h^2\triangle^2\frac{(n+q-2r-3)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\Big)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big(\frac{(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+3h\triangle\frac{(n+q-2h-r-2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+3h^2\triangle^2\frac{(n+q-h-2r-3)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+h^3\triangle^3\frac{(n+q-3r-4)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\Big)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

Berücksichtigt man nun die Gleichung

$$6)\ \Delta^m \frac{x^{p|-\Delta x}}{1^{p|1}} = \frac{(x+m\Delta x)^{p|-\Delta x}}{1^{p|1}} - \frac{m}{1}\frac{(x+(m-1)\Delta x)^{p|-\Delta x}}{1^{p|1}} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{(x+(m-2)\Delta x)^{p|-\Delta x}}{1^{p|1}} - \ldots(-)^m x^{p|-\ldots x}$$

$$= \frac{p^{m|-1}}{1^{p|1}}(\Delta x)^m x^{p-m|-\Delta x} = \frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-(p-m+1)\Delta x)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (p-m)}(\Delta x)^m = \frac{(\Delta x)^m x^{p-m|-\Delta x}}{1^{p-m|1}}$$

die sich aus meiner Lehre von den aufsteigenden Funktionen §. 30 leicht folgert, und benützt sie, indem $\Delta x = 1$, $p = 2q-1$ und statt m und x die erforderlichen Werthe gesetzt werden, so ergibt sich aus 5 folgende Darstellung für das unter 1 vorgelegte Problem.

$$7)\ A_1 = \frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - q\left(\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h\frac{(n+q-r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + 2h\frac{(n+q-h-r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} + h^2\frac{(n+q-2r-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}\right)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + 2h\frac{(n+q-2h-r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} + 3h^2\frac{(n+q-h-r-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}} \ldots\ldots\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

oder

$$8)\ A_1 = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\frac{(n+q-yh-z(r+1)-1)^{2q-z-1|-1}}{1^{2q-z-1|1}}\right)$$

Die Bedingungsgleichungen fallen mit denen zu 6 §. 2, Pg. 8 angegebenen zusammen, y bezieht sich auf h und z auf $(r+1)$.

Soll die Summe aller Gruppenanzahlen für die Summen von q bis n dargestellt werden, so ist das in §. 4, Pg. 18 angegebene Verfahren auf die Darstellung 3 oder 7 anzuwenden. Wird es auf die letzte angewendet, so ergibt sich

$$9)\ \sum_{n=q}^{n=n} A_1 = \frac{(n+q)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - \frac{q}{1}\left(\frac{(n+q-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\frac{(n+q-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n+q-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\frac{(n+q-h-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\frac{(n+q-2r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

oder

$$10)\ \sum_{n=q}^{n=n} A_1 = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\frac{(n+q-yh-z[r+1])^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}}\right)$$

Ist der Inbegriff aller Summen zwischen m und n also $m+1$, $m+2$, $m+3$, . . . . n zu bestimmen, so ergibt sich, wenn die in 13 und 14 des vorigen § gebrauchte Bezeichnungsweise beibehalten wird.

$$11)\ \sum_{m+1} A_1 = \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} h^z \frac{(n+q-yh-z[r+1])^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}} \right)$$
$$- \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} h^z \frac{(m+q-yh-z[r+1])^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}} \right)$$

**und bei entwickelter Darstellung**

$$12)\ \sum_{m+1}^{n} A_1 = \frac{(n+q)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - \frac{q}{1}\left( \frac{(n+q-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\frac{(n+q-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} \right)$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left( \frac{(n+q-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\frac{(n+q-h-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\frac{(n+q-2r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} \right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$- \frac{(m+q)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + \frac{q}{1}\left( \frac{(m+q-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\frac{(m+q-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} \right)$$
$$- \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left( \frac{(m+q-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\frac{(m+q-h-r-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\frac{(m+q-2r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} \right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**Von den hier gefundenen Resultaten lassen sich leicht weitere Anwendungen machen. Wird die Anzahl der Elemente von r auf h in 1 beschränkt, also r=h gesetzt, so liegt folgendes Problem vor**

$$13)\ A = P'[sn\,;\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_h, b_2, b_3 \ldots b_h, c_3, c_4, \ldots c_h, \ldots h_h]^q$$

**Die Gruppen-Anzahl bestimmt sich aus 3 oder 7 leicht, wenn r=h gesetzt wird. Sie läfst sich auch aus der Entwicklung des Polynomiums**

$$Q^q = (x+x^2+x^3+\ldots x^h+x^2+x^3\ldots x^h+x^3+x^4\ldots x^h+\ldots+x^{h-1}+x^h+x^h)^q$$
$$= \frac{x^q}{(1-x)^{2q}}\,(1-[h+1]x^h+hx^{h+1})^q$$

**ableiten, wenn die angezeigten Geschäfte ausgeführt und die Vorzahl von $x^n$ bestimmt wird. Die wirkliche Entwicklung gibt folgende Darstellung**

$$14)\ A = \frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big( (n+q-1)^{2q-1|-1} - \frac{q}{1}[(h+1)(n+q-h-1)^{2q-1|-1} - h\,(n+q-h-2)^{2q-1|-1}]$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}[(h+1)^2(n+q-2h-1)^{2q-1|-1} - 2(h+1)h(n+q-2h-2)^{2q-1|-1} + h^2(n+q-2h-3)^{2q-1|-1}]$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}[(h+1)^3(n+q-3h-1)^{2q-1|-1} - 3(h+1)^2h(n+q-3h-2)^{2q-1|-1} + 3(h+1)h^2(n+q-3h-3)^{2q-1|-1}\ldots]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \Big)$$
$$= \frac{1}{1^{2q-1|1}} \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} (h+1)^y h^z (n+q-y(h+1)-zh-1)^{2q-1|-1} \right)$$

Hiebei gelten die bekannten Bedingungsgleichungen. Das nämliche Resultat wäre entstanden, wenn h=r in 3 gesetzt, die Horizontalreihen zusammengezogen und in veränderter Gestalt gegeben worden wären.

Aus 7 ergibt sich für dieselbe Gruppenanzahl, wenn h=r gesetzt wird,

$$15)\ A = \frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - q\left(\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h\,\frac{(n+q-h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + 2h\,\frac{(n+q-2h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} + h^2\frac{(n+q-2h-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}\right)$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + 3h\,\frac{(n+q-3h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}} + 3h^2\,\frac{(n+q-3h-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}} \cdots\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$= \sum_{x=0}^{x=\infty}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\,\frac{(n+q-yh-z[h+1]-1)^{2q-x-1|-1}}{1^{2q-x-1|1}}\right)$$

Hier gelten die bekannten Bedingungsgleichungen.

Soll der Inbegriff der Gruppen-Anzahlen für die Summen zwischen m und n also für m+1, m+2, m+3, . . . n bestimmt werden, so ergibt sich aus 14 nach der in §. 4, Pg. 18 angezeigten Methode

$$16)\ \sum_{m+1}A = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}(h+1)^y h^z\frac{(n+q-y[h+1]-zh)^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\right)$$
$$-\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}(h+1)^y h^z\frac{(m+q-y[h+1]-zh)^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\right)$$

Aus der Darstellung 15 ergibt sich

$$17)\ \sum_{m+1}^{n}A = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\,\frac{(n+q-yh-z[h+1])^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}}\right)$$
$$-\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\,\frac{(m+q-yh-z[h+1])^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}}\right)$$

oder bei entwickelter Darstellung

$$18)\ \sum_{m+1}^{n}A = \frac{(n+q)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - q\left(\frac{(n+q-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\,\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n+q-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\,\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\,\frac{(n+q-2h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$-\frac{(m+q)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + q\left(\frac{(m+q-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\,\frac{(m+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)$$
$$-\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(m+q-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\,\frac{(m+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\,\frac{(m+q-2h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

## §. 8.

**Das unter §. 7 Nro. 1 gegebene Problem läfst auch folgende Form zu**

$$1)\ A_2 = P'[sn;\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_r$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots b_{r-1}$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots c_{r-2}$$
$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \quad \vdots$$
$$h_1, h_2, h_3, \ldots h_k]^q$$

**Zur Bestimmung der fraglichen Gruppenanzahl wird die Potenzirung des folgenden Polynomiums nöthig**

$$Q^q = [x+x^2+\ldots x^r+x+x^2+\ldots x^{r-1}+x+x^2+x^3+\ldots x^{r-2}\ldots+x+x^2+\ldots x^k]^q$$
$$=\left(\frac{x-x^{r+1}}{1-x} + \frac{x-x^r}{1-x} + \frac{x-x^{r-1}}{1-x} + \ldots + \frac{x-x^{k+1}}{1-x}\right)^q$$
$$=\left(hx-(x^{k+1}+x^{k+2}\ldots x^{r+1})\right)^q \frac{1}{(1-x)^q}$$
$$=\frac{x^q}{(1-x)^{2q}}\left(h-(hx+x^k-x^{r+1})\right)^q$$

**Die Geschäfte, deren Ausführung die entwickelte Darstellung gibt, lassen sich aus folgender Zusammenstellung erkennen.**

$$Q^q=\left(x^q+\frac{(2q)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+1}+\frac{(2q+1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+2}+\ldots.\right)(h^q-qh^{q-1}(hx+x^k-x^{r+1})$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}h^{q-2}(hx+x^k-x^{r+1})^2$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}h^{q-3}(hx+x^k-x^{r+1})^3$$
$$+\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}h^{q-4}(hx+x^k-x^{r+1})^4$$
$$\vdots\ \quad \vdots\ \quad \vdots)$$

**Ist die Entwicklung gemacht, so mufs die Form der Vorzahl von $x^n$ bestimmt werden, um das unter 1 vorgelegte Problem zu beantworten. Die Form dieser Vorzahl ist**

$$2)\ A_2 = \frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big(h^q(n+q-1)^{2q-1|-1} - qh^{q-1}\Big(h\,(n+q-2)^{2q-1|-1} + (n+q-k-1)^{2q-1|-1} - (n+q-r-2)^{2q-1|-1}\Big)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}h^{q-2}\Big(h^2(n+q-3)^{2q-1|-1} + 2h\begin{vmatrix}(n+q-k-2)^{2q-1|-1}\\ -(n+q-r-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix} + \frac{2.1}{1.2}\begin{vmatrix}(n+q-2k-1)^{2q-1|-1}\\ -2(n+q-k-r-2)^{2q-1|-1}\\ (n+q-2r-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3,1}}h^{q-3}\Big(h^3(n+q-4)^{2q-1|-1} + 3h^2\begin{vmatrix}(n+q-k-3)^{2q-1|-1}\\ -(n+q-r-4)^{2q-1|-1}\end{vmatrix} + 3h\begin{vmatrix}(n+q-2k-2)^{2q-1|-1} & +(n+q-3k-1)^{2q-1|-1}\\ -2(n+q-k-r-3)^{2q-1|-1} & -3(n+q-2k-r-2)^{2q-1|-1}\\ +(n+q-2r-4)^{2q-1|-1} & +3(n+q-k-2r-3)^{2q-1|-1}\\ & -(n+q-3r-4)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**oder**

$$A_2 = \frac{1}{1^{2q-1|1}}\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x h^{q-x}\,\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\,\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1}1^{y|1}1^{z|1}}\,h^{w+y}\,(n+q-w.1-yk-z[r+1]-1)^{2q-1|-1}\Big)$$

**Hier ist $x=w+y+z$. Für jeden Werth von x sind die Summen der Versetzungen mit Wiederholungen zur dritten Classe zu bilden. w bezieht sich auf 1, y auf k und z auf $(r+1)$.**

**Das eben erhaltene Polynomium kann anders geordnet und entwickelt werden, ohne dafs Inhalt und Bedeutung geändert wird. Die Umformung soll folgende seyn**

$$Q^q = \frac{x^q}{(1-x)^{2q}}(-)^q\,[x^k - x^{r+1} - h + hx]^q = \frac{x^q}{(1-x)^{2q}}(-)^q\,[x^k - x^{r+1} + h(1-x)]^q$$
$$= \frac{(-)^q}{1^{2q-1|1}}\Big(x^q + [2q]^{2q-1|-1}x^{q+1} + [2q+1]^{2q-1|-1}x^{q+2} + [2q+2]^{2q-1|-1}x^{q+3}\ \ldots\Big)\Big(x^{kq} - qx^{k(q-1)}(x^{r+1}+h[1-x])$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{k(q-2)}(x^{r+1}+h[1-x])^2$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}x^{k(q-3)}(x^{r+1}+h[1-x])^3$$
$$+\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}x^{k(q-4)}(x^{r+1}+h[1-x])^4$$
$$\vdots \qquad \Big)$$

Die Ausführung der hier angedeuteten Geschäfte gibt die Vorzahl von $x^n$, deren Gestalt aus folgender Gleichung ersichtlich ist

$$3)A_2=(-)^q\frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big((n+q-kq-1)^{2q-1|-1}-q\Big((n+q-k[q-1]-r-2)^{2q-1|-1}+h\begin{vmatrix}(n+q-k[q-1]-1)^{2q-1|-1}\\-(n+q-k[q-1]-2)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+q-k[q-2]-2r-3)^{2q-1|-1}+2h\begin{vmatrix}(n+q-k[q-2]-r-2)^{2q-1|-1}+h^2\\-(n+q-k[q-2]-r-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(n+q-k[q-2]-1)^{2q-1|-1}\\-2\,(n+q-k[q-2]-2)^{2q-1|-1}\\+(n+q-k[q-2]-3)^{2q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$=(-)^q\Big(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1}1^{y|1}1^{z|1}}h^z\frac{(n+q-k[q-x]-w[r+1]-y0-z.1-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\Big)\Big)$$

Die Bedingungsgleichung für das zweite $\Sigma$ ist

$$x = w + y + z$$

w bezieht sich hier auf r+1, y auf 0 und z auf 1. Die übrigen Bedingungen, welchen diese Gröfsen unterliegen, sind bekannt.

Die Fakultäten, in dieser entwickelten Darstellung bilden der Reihe nach die ersten, zweiten, dritten Unterschiede u. s. w. Wendet man auf sie die Gleichung 6 §. 7, Pg. 31 an, so ergibt sich folgende Darstellung für Nro. 3.

$$4)\ A_2=(-)^q\Big(\frac{(n+q-kq-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}-q\Big(\frac{(n+q-k[q-1]-r-2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+h\frac{(n+q-k[q-1]-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{(n+q-k[q-2]-2r-3)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+2h\frac{(n+q-k[q-2]-r-3)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}+h^2\frac{(n+q-k[q-2]-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}\Big)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$=(-)^q\Big(\sum_{x=0}^{x=1}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}h^z\frac{(n+q-k[q-x]-y[r+1]-z.1-1)^{2q-x-1|-1}}{1^{2q-x-1|-1}}\Big)\Big)$$

y bezieht sich hier auf r+1 und z auf 1. Für die Gröſse x=y+z innerhalb der Fakultät nach dem zweiten Σ ist immer der Werth von x unverändert beizubehalten.

Wird die Ordnung in den Grundgröſsen des Polynomiums, woraus die Gleichung 3 abgeleitet wurde

$$(-)^q\,[x^k - x^{r+1} + h\,(1-x)]^q$$

beibehalten, aber die Glieder der entwickelten Darstellung in der umgekehrten Ordnung genommen, so entsteht folgendes

$$(x^{r+1}+h[1-x])^q - qx^k(x^{r+1}+h[1-x])^{q-1} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{2k}(x^{r+1}+h[1-x])^{q-2} \ldots\ldots$$

Werden nun die nöthigen Entwicklungen gemacht, und die Unterschiede der Fakultäten, worauf diese führen, beachtet, so ergibt sich folgende Darstellung

$$5)\quad A_2 = \frac{1}{1^{2q-1|1}}\left(h^q\Delta^q(n-1)^{2q-1|-1} - \frac{q}{1}h^{q-1}\left(\Delta^{q-1}(n-k)^{2q-1|-1} - \Delta^{q-1}(n-r-1)^{2q-1|-1}\right)\right.$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}h^{q-2}\left(\Delta^{q-2}(n-2k+1)^{2q-1|-1} - 2\Delta^{q-2}(n-k-r)^{2q-1|-1} + \Delta^{q-2}(n-2r-1)^{2q-1|-1}\right)$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}h^{q-3}\left(\Delta^{q-3}(n-3k+2)^{2q-1|-1} - 3\Delta^{q-3}(n-2k-r+1)^{2q-1|-1} + 3\Delta^{q-3}(n-k-2r)^{2q-1|-1}\ldots\right)$$
$$\left.\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\right)$$

Wird die Gleichung 6 §. 7, Pg. 31 benützt, um die Unterschiede auf einfachere Darstellungen zurückzuführen, so ergibt sich

$$6)\quad A_2 = h^q\frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - \frac{q}{1}h^{q-1}\left(\frac{(n-k)^{q|-1}}{1^{q|1}} - \frac{(n-r-1)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}h^{q-2}\left(\frac{(n+2k+1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - 2\frac{(n-k-r)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} + \frac{(n-2r-1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}}\right)$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}h^{q-3}\left(\frac{(n-3k+2)^{q+|2-1}}{1^{q+2|1}} - 3\frac{(n-3k-r+1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + \frac{3.2}{1.2}\frac{(n-k-2r)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - \ldots\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$= \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\frac{(n-y[k+1]-zr-1)^{q+y+z-1|-1}}{1^{q+y+z-1|1}}\right)$$

Soll der Inbegriff der Gruppenanzahlen der Summen m+1, m+2, m+3, . . . . n bestimmt werden, so erhält man diesen durch Anwendung des früher angegebenen Verfahrens leicht. Es ist

$$\sum_{m+1}^{n} A_2 = \sum_{n=q}^{n=n} A_2 - \sum_{n=q}^{n=m} A_2$$

**Aus der Gleichung 6 ergibt sich sofort**

$$7) \sum_{m+1}^{n} A_2 =$$

$$\sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x} \left( \sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} 1^{z|1}} \frac{(n-y[k+1]-zr)^{q+y+z|-1}}{1^{q+y+z|1}} \right)$$

$$- \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x} \left( \sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} 1^{z|1}} \frac{(m-y[k+1]-zr)^{q+y+z|-1}}{1^{q+y+z|1}} \right)$$

**Wird hierin m=q—1 gesetzt, so ergibt sich der Inbegriff der Summen von q bis n. Der zweite Ausdruck in 7 verschwindet. Die entwickelte Darstellung für 7 ist folgende**

$$8) \sum_{m+1}^{n} A_2 = h^q \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} - q h^{q-1} \left( \frac{(n-k+1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - \frac{(n-r)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} \right)$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2} \left( \frac{(n-2k+2)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - 2 \frac{(n-k-r+1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + \frac{(n-2r)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$- h^q \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{q}{1} h^{q-1} \left( \frac{(m-k+1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - \frac{(m-r)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} \right)$$

$$- \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2} \left( \frac{(m-2k+2)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - 2 \frac{(m-k-r+2)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + \frac{(m-2r)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

**Werden die Elementen-Reihen in dem Probleme 1 um (k—1) Glieder verkürzt, so geht r in h über und es liegt folgende Aufgabe vor**

$$9) \; A = P'[sn; \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots & a_h \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots & b_{h-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, & \ldots & c_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ g_1, & g_2 & & & \\ h_1 & & & & \end{matrix}]^q$$

**Um dieses Problem zu lösen, wird folgendes Polynomium zu entwickeln seyn.**

$$Q^q=(x+x^2+x^3+\ldots x^h+x+x^2+x^3+\ldots x^{h-1}+x+x^2+\ldots x^{h-2}+\ldots x+x^2+x)^q$$

$$=\left(\frac{hx-(x^2+x^3+x^4+\ldots.x^{h+1})}{1-x}\right)^q=\left(\frac{hx-hx^2-x^2+x^{h+2}}{(1-x)^2}\right)^q$$

$$=\frac{x^q}{(1-x)^{2q}}\,[h-(h+1)x+x^{h+1}]^q$$

$$=\left(x^q+\frac{(2q)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|}}\,x^{q+1}+\frac{(2q+1)^{3q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\,x^{q-2}+\ldots.\right)\left(h^q-qh^{q-1}([h+1]x-x^{h+1})\right.$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\,h^{q-2}([h+1]x-x^{h+1})^2$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\,h^{q-3}([h+1]x-x^{h+1})^3$$

$$\left.\vdots\qquad\qquad\vdots\right)$$

**Werden die nöthigen Entwicklungen gemacht, so ergibt sich für die Vorzahl von $x^n$ folgende Darstellung**

$$10)\;A=\frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big(h^q(n+q-1)^{2q-1|-1}-qh^{q-1}[(h+1)(n+q-2)^{2q-1|-1}-(n+q-h-2)^{2q-1|-1}]$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\,h^{q-2}[(h+1)^2(n+q-3)^{2q-1|-1}-2(h+1)(n+q-h-3)^{2q-1|-1}+(n+q-2h-3)^{2q-1|-1}]$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\,h^{q-3}[(h+1)^3(n+q-4)^{2q-1|-1}-3(h+1)^2(n+q-h-4)^{2q-1|-1}+3(h+1)(n+q-2h-4)^{2q-1|-1}-\ldots]$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\Big)$$

**oder**

$$11)\;A=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\,h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z}(h+1)^y\,(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\,\frac{(n+q-y.1-z[h+1]-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)$$

**Das in 9 aufgeführte Problem löfst sich auch dadurch, dafs in den Gleichungen 2, 3, 4 und 6 $k=1$ und $r=h$ gesetzt wird. Die eben gefundene Gleichung ergibt sich aus 10, wenn die Horizontal-Reihen gehörig vereinigt werden.**

**Aus der Gleichung 4 ergibt sich**

$$12)\;A=(-)^q\left(\frac{n-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}-q\left(\frac{(n-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+\frac{h(n-1)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)\right.$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+2h\,\frac{(n-h-1)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}+h^2\,\frac{(n-1)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}\right)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{(n-3h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}+3h\,\frac{(n-2h-1)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}+3h^2\,\frac{(n-h-1)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}}+h^3\,\frac{(n-1)^{2q-4|-1}}{1^{2q-4|1}}\right)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\Big)$$

$$=(-)^q\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\,\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{x+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\,h^z\,\frac{(n-yh-z.0-1)^{2q-z-1|-1}}{1^{2q-x-1|1}}\right)$$

**Hierin bezieht sich x auf h und z auf 0.**

**Aus der Gleichung 6 ergibt sich**

$$13)\ A = h^q \frac{(n-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} - qh^{q-1}\left(\frac{(n-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} - \frac{(n-h-1)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2}\left(\frac{(n-1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - 2\frac{(n-h-1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} + \frac{(n-2h-1)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}}\right)$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} h^{q-3}\left(\frac{(n-1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - 3\frac{(n-h-1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + 3\frac{(n-2h-1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - \frac{(n-3h-1)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} \frac{(n-y.0-zh-1])^{q+y+z-1|-1}}{1^{q+y+z-1|1}}\right)$$

**y bezieht sich hierin auf 0 und z auf h.**

**Soll der Inbegriff der Gruppenanzahlen der Summen m+1, m+2, m+3 . . . . n genommen werden, so ist auch hier, wie früher, zu verfahren. Aus 12 ist**

$$14)\ \sum_{m+1}^{n} A = (-)^q\left(\frac{n^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - q\left(\frac{(n-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\,\frac{n^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)\right.$$
$$\left. +\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(n-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\,\frac{(n-h)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\,\frac{n^{2q-2-1}}{1^{2q-2|1}}\right)\right.$$
$$\left.\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\right)$$
$$(-)^{q+1}\left(\frac{m^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - q\left(\frac{(m-h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + h\,\frac{m^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)\right.$$
$$\left. +\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(m-2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} + 2h\,\frac{(m-h)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + h^2\,\frac{m^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}}\right)\right.$$
$$\left.\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\right)$$
$$= (-)^q \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} h^z \frac{(n-yh-z.0)^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}}\right)$$
$$(-)^{q+1} \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z} \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} h^z \frac{(m-yh-z.0)^{2q-z|-1}}{1^{2q-z|1}}\right)$$

**Aus 10 ergibt sich**

$$15)\ \sum_{m+1}^{n} A =$$
$$\sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z} (h+1)^y (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} \frac{(n+q-y.1-z[h+1])^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\right)$$
$$-\sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z} (h+1)^y (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} \frac{(m+q-y.1-z[h+1])^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\right)$$

Aus 13 ergibt sich

$$16)\quad \sum_{m+1}^{n} A = h^q \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} - qh^{q-1}\left(\frac{n^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - \frac{(n-h)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}}\right)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2}\left(\frac{n^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - 2\frac{(n-h)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + \frac{(n-2h)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$-h^q \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}} + \frac{q}{1} h^{q-1}\left(\frac{m^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}} - \frac{(m-h)^{q+1|-1}}{1^{q+1|1}}\right)$$
$$-\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2}\left(\frac{m^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} - 2\frac{(m-h)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}} + \frac{(m-2h)^{q+2|-1}}{1^{q+2|1}}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

oder

$$17)\quad \sum_{m+1}^{n} A = \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} \frac{(n-y\,.\,0-zh)^{q+y+z|-1}}{1^{q+y+z|1}}\right)$$
$$-\sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\left(\sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}} \frac{(m-y\,.\,0-zh)^{q+y+z|-1}}{1^{q+y+z|1}}\right)$$

## §. 9.

**Es sind h Elementenreihen gegeben, von denen die erste (2h-1) Elemente zählt, die zweite zwei Elemente weniger als die erste, die dritte zwei weniger als die zweite, u. s. w., die letzte nur ein Element. Aus den Elementen dieser Reihe werden die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe gebildet. Wie grofs ist die Gruppenanzahl?**

**Dieses Problem stellt sich unter folgender Form dar.**

$$1)\quad A = P'[sn;\ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots a_{2h-4}, a_{2h-3}, a_{2h-2}, a_{2h-1}]^q$$
$$b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots\ldots b_{2h-4}, b_{2h-3}, b_{2h-2},$$
$$c_3, c_4, \ldots\ldots\ldots c_{2h-6}, c_{2h-5}$$
$$d_4, \ldots\ldots\ldots d_{2h-6}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$g_{h-1}, g_h, g_{h+1}$$
$$h_h$$

**Werden für diese Elementenreihen Polynomien eingeführt, so entsteht**

$$Q^1=[x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots.+(h-1)x^{h-1}+hx^h+(h-1)^{h+1}\ldots.3x^{2h-3}+2x^{2h-2}+x^{2h-1}]^q$$

$$=\left(\frac{x-x^{2h}}{1-x}+\frac{x^2-x^{2h-1}}{1-x}+\frac{x^3-x^{3h-2}}{1-x}\quad\ldots\quad\frac{x^h-x^{h+1}}{1-x}\right)$$

$$=\left(\frac{x+x^2+x^3\ldots.x^h-(x^{h+1}+x^{h+2}+x^{h+3}\ldots.x^{2h})}{1-x}\right)^q$$

$$=\frac{x^q}{(1-x)^q}\left(\frac{1-2h^h+x^{2h}}{1-x}\right)^q=\left(1-(2x^h-x^{2h})\right)\frac{x^q}{(1-x)^{2q}}$$

$$=\left(x^q+\frac{(2q)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+1}+\frac{(2q+1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+2}+\frac{(2q+2)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+3}+\ldots.\right)\left(1-q(2x^h-x^{2h})\right.$$

$$\left.+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(2x^h-x^{2h})^2\right.$$

$$\left.-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(2x^h-x^{2h})^3\right.$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

**Werden die angezeigten Entwicklungen gemacht, und wird dann die Vorzahl von $x^n$ bestimmt, so ergibt sich zur Bestimmung der fraglichen Gruppenanzahl folgende Darstellung**

$$2)\ A=\frac{1}{1^{2q-1|1}}\left((n+q-1)^{2q-1|-1}-q[2(n+q-h-1)^{2q-1|-1}-(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}]\right.$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}[2^2(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}-2.2(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}+(n+q-4h-1)^{2q-1|-1}]$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}[2^3(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}-3.2^2(n+q-4h-1)^{2q-1|-1}+3.2(n+q-5h-1)^{2q-1|-1}-\ldots.]$$

$$\left.\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\right)$$

$$=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=y+z}(-)^z\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}2^y\frac{(n+q-yh-z2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)$$

**Wird die Darstellung 2 anders geordnet, so ergibt sich folgende**

$$3)\ A=\frac{(n+q-1)^{2q-1|1}}{1^{2q-1|1}}-2q\frac{(n+q-1-h)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}$$

$$+\left(2^2\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}+q\right)\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}$$

$$-\left(2^3\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}+2.2\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\right)\frac{(n+q-3h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$(-)^{2r}\left(2^{2r}\frac{q^{2r|-1}}{1^{2r|1}}+\frac{(2r-1)}{1}2^{2r-2}\frac{q^{2r-1|-1}}{1^{2r-1|1}}+\frac{(2r-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}2^{2r-4}\frac{q^{2r-2|-1}}{1^{2r-1|1}}\ldots.\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}q^{r|-1}\right)\frac{(n+q-2rh-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}$$

$$(-)^{2r+1}\left(2^{2r+1}\frac{q^{2r+1|-1}}{1^{2r+1|1}}+\frac{2r}{1}2^{2r-1}\frac{q^{2r|-1}}{1^{2r|1}}+\ldots.\frac{(r+1)^{r|-1}}{1^{r|1}}2q^{r+1|-1}\right)\frac{(n+q-[2r+1]h-1)^{2q-1|-1}}{2q-1|1}$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

Nun ergibt sich durch eine ganz einfache Entwicklung

$$2^2 \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \frac{+q}{1} = \frac{2q(2q-1)}{1 \cdot 2}$$

$$2^3 \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} + 2 \cdot 2 \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} = \frac{2q(2q-1)(2q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$2^4 \frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}} + 3 \cdot 2^2 \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} = \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w. Hiernach gehen die Gleichungen 2 und 3 in folgende über

$$4) \; A = \frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - 2q \frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}} \frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - \ldots$$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{(2q)^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(n+q-xh-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}$$

Soll der Inbegriff der Summen zwischen m und n genommen werden, so ist

$$\sum_{m+1}^{n} A = \sum_{n=q}^{n=n} A - \sum_{n=q}^{n=m} A$$

Werden die Geschäfte ausgeführt, so ergibt sich aus 2

$$5) \sum_{m+1}^{n} A = \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} 1^{z|1}} 2^y \frac{(n+q-yh-z \cdot 2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} \right)$$

$$- \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=y+z} (-)^z \frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1} 1^{z|1}} 2^y \frac{(m+q-yh-z \cdot 2h)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} \right)$$

Aus 4 aber ergibt sich

$$6) \sum_{m+1}^{n} A = \frac{1}{1^{2q|1}} \Big( (n+q)^{2q|-1} - (m+q)^{2q|-1}$$

$$- \frac{2q}{1} \Big( (n+q-h)^{2q|-1} - (m+q-h)^{2q|-1} \Big)$$

$$+ \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}} \Big( (n+q-2h)^{2q|-1} - (m+q-2h)^{2q|-1} \Big)$$

$$- \frac{(2q)^{3|-1}}{1^{3|1}} \Big( (n+q-3h)^{2q|-1} - (m+q-2h)^{2q|-1} \Big)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \Big)$$

$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{(2q)^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(n+q-xh)^{2q|-1}}{1^{2q|1}} - \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{(2q)^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(m+q-xh)^{2q|-1}}{1^{2q|1}}$$

Durch die vorstehende Aufgabe ist zugleich auch folgende gelöst.

$$A = P'[sn;\ a_{-h+1}, a_{-h+2}, a_{-h+3}, \ldots a_{-1}, a_0, a_1, \ldots a_{h-3}, a_{h-2}, a_{h-1}]^q$$
$$b_{-h+2}, b_{-h+3}, \ldots b_{-1}, b_0, b_1, \ldots b_{h-3}, b_{h-2}$$
$$c_{-h+3}, \ldots c_{-1}, c_0, c_1, \ldots c_{h-3}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$g_{-1}, g_0, g_1$$
$$h_0$$

**Hierin können sich die Summen von — q(h-1) bis zu + q(h-1) erstrecken. Die Summe des Mittelgliedes geht in 0 über und scheidet die positiven Summen von den negativen. Die Gruppenanzahl für n wird gefunden, wenn man n+hq statt n in 4 setzt. Es entsteht**

$$7) A = \frac{(n+(h+1)q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - 2q\frac{(n+(h+1)q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\frac{(n+(h+1)q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}} - \ldots$$

**Aus 6 wird**

$$8) \sum_{m+1}^{n} A = \frac{1}{1^{2q|1}}\Big((n+(h+1)q)^{2q|-1} - (m+(h+1)q)^{2q|-1}$$
$$- 2q\Big((n+(h+1)q-h)^{2q|-1} - (m+(h+1)q-h)^{2q|-1}\Big)$$
$$+ \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+(h+1)q-2h)^{2q|-1} - (m+(h+1)q-2h)^{2q|-1}\Big)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots\Big)$$

**m und n können hier einen positiven oder negativen Werth haben. Sind die beiden Summen vom Mittelgliede gleich weit entfernt, so ist**

$$9) \sum_{-n}^{+n} A = \frac{1}{1^{2q|1}}\Big((n+(h+1)q)^{2q|-1} - (-n+(h+1)q)^{2q|-1}$$
$$- 2q\Big((n+(h+1)q-h)^{2q|-1} - (-n+(h+1)q-h)^{2q|-1}\Big)$$
$$+ \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+(h+1)q-2h)^{2q|-1} - (-n+(h+1)q-2h)^{2q|-1}\Big)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots\Big)$$

**Es sind h Elementenreihen gegeben, von denen die $h^{te}$ (k+1) Glieder, jede vorhergehende immer zwei mehr als die nachfolgende zählt. Aus den Elementen dieser Reihen werden die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe gebildet. Wie grofs ist ihre Guppenanzahl?**

**Diefs Problem stellt sich unter folgender Gestalt dar**

$$10)\quad A = P'[sn;\ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots a_{2h+k-2}, a_{2h+k-1}]^q$$
$$b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots\ldots b_{2h+k-2}$$
$$c_3, c_4, \ldots\ldots\ldots c_{2h+k-3}$$
$$d_4, \ldots\ldots d_{2h+k-4}$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$g_{h-1}, g_h, g_{h+1}, \ldots\ldots g_{h+k+1}$$
$$h_h, h_{k+1}, h_{h+2} \ldots h_{h+k}$$

**Werden für diese Reihen Polynomien eingeführt, so entsteht**

$$Q^q = [x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^{2h+k-1}]^q$$
$$x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots\ldots\ldots x^{2h+k-2}$$
$$x^3+x^4+\ldots\ldots\ldots x^{2h+k-3}$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$x^{h-1}+x^h+x^{h+1}\ldots x^{h+k}+x^{h+k+1}$$
$$x^h+x^{h+1}\ldots x^{h+k}$$

$$=\left(\frac{x-x^{2h+k}}{1-x}+\frac{x^2-x^{2h+k-1}}{1-x}+\ldots+\frac{x^h-x^{h+k+1}}{1-x}\right)^q=\left(\frac{x-x^{h+1}}{(1-x)^2}-\frac{x^{h+k+1}-x^{2h+k+1}}{(1-x)^2}\right)^q$$

$$=\frac{x^q}{(1-x)^{2q}}\left(1-(x^h+x^{h+k}-x^{2h+k})\right)^q$$

$$=\left(x^q+\frac{(2q)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+1}+\frac{(2q+1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}x^{q+2}+\ldots.\right)\left(1-q(x^h+x^{h+k}-x^{2h+k})\right.$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(x^h+x^{h+k}-x^{2h+k})^2$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(x^h+x^{h+k}-x^{2h+k})^3$$
$$\left.\vdots\right)$$

**Werden die angezeigten Geschäfte ausgeführt, und wird dann die Vorzahl von $x^n$ bestimmt, so ergibt sich für die fragliche Gruppenanzahl folgende Darstellung**

$$11)\ A=\frac{1}{1^{2q-1|1}}\Big((n+q-1)^{2q-1|-1}-q\Big((n+q-h-1)^{2q-1|-1}+(n+q-h-k-1)^{2q-1|-1}-(n+q-2h-k-1)^{2q-1|-1}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+q-2h-1)^{2q-1|-1}+2\left|\begin{matrix}(n+q-2h-k-1)^{2q-1|-1}\\ -(n+q-3h-k-1)^{2q-1|-1}\end{matrix}\right|\begin{matrix}+(n+q-2h-2k-1)^{2q-1|-1}\\ -2(n+q-3h-2k-1)^{2q-1|-1}\\ +(n+q-4h-2k-1)^{2q-1|-1}\end{matrix}\Big)$$

$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}\Big((n+q-3h-1)^{2q-1|-1}+3\left|\begin{matrix}(n+q-3h-k-1)^{2q-1|-1}+3\\ -(n+q-4h-k-1)^{2q-1|-1}\end{matrix}\right|\begin{matrix}(n+q-3h-2k-1)^{2q-1|-1}\\ -2(n+q-4h-2k-1)^{2q-1|-1}\\ (n+q-5h-2k-1)^{2q-1|-1}....\end{matrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1}1^{x|1}1^{z|1}}\cdot\frac{(n+q-wh-y[h+k]-z[2h+k]-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\Big)$$

**In dieser Darstellung gelten die bekannten Bedingungsgleichungen.**

**Soll der Inbegriff der Gruppenanzahlen für die Summen m+1, m+2, m+3, . . . n bestimmt werden, so ergibt sich aus 11 nach dem bekannten Verfahren**

$$12)\ \sum_{m+1}^{n}=\frac{1}{1^{2q|1}}\Big((n+q)^{2q|-1}-q\Big((n+q-h)^{2q|-1}+(n+q-h-k)^{2q|-1}-(n+q-2h-k)^{2q|-1}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+q-2h)^{2q|-1}+2\left|\begin{matrix}(n+q-2h-k)^{2q|-1}\\ -(n+q-3h-k)^{2q|-1}\end{matrix}\right|\begin{matrix}+(n+q-2h-2k)^{2q|-1}\\ -2(n+q-3h-2k)^{2q|-1}\\ +(n+q-4h-2k)^{2q|-1}\end{matrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$-\frac{1}{1^{2q|1}}\Big((m+q)^{2q|-1}-q\Big((m+q-h)^{2q|-1}+(m+q-h-k)^{2q|-1}-(m+q-2h-k)^{2q|-1}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((m+q-2h)^{2q|-1}+2\left|\begin{matrix}(m+q-2h-k)^{2q|-1}\\ -(m+q-3h-k)^{2q|-1}\end{matrix}\right|\begin{matrix}+(m+q-2h-2k)^{2q|-1}\\ -2(m+q-3h-2k)^{2q|-1}\\ (m+q-4h-2k)^{2q|-1}\end{matrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

**oder**

$$13)\ \sum_{m+1}^{n}A=$$

$$\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1}1^{y|1}1^{z|1}}\cdot\frac{(n+q-wh-y[h+k]-z[2h+k])^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\Big)$$

$$-\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=w+y+z}(-)^z\frac{(w+y+z)^{w+y+z|-1}}{1^{w|1}1^{y|1}1^{z|1}}\cdot\frac{(m+q-wh-y[h+k]-z[2h+k])^{2q|-1}}{1^{2q|1}}\Big)$$

Die Gleichungen 10 — 13 sind, wie sich leicht erkennen läfst allgemeiner als die in 2 — 9 aufgefundenen. Wird $k = 0$, so lassen sich die ersten aus den letztern ableiten.

## §. 10

Es sind h Elementen-Reihen gegeben, deren Gliederanzahlen ganz willkührlich beschränkt sind, die erste Reihe hat $r_1$-$p_1$, die zweite $r_2$-$p_2$, die dritte $r_3$-$p_3$ Elemente u. s. w. Aus den Elementen dieser Reihen werden die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe gebildet. Wie grofs ist ihre Gruppenanzahl?

Das Problem stellt sich unter folgender Gestalt dar

$$1)\quad A = P'[sn;\ a_{p_1+1},\ a_{p_1+2},\ a_{p_1+3},\ \ldots\ a_{r_1-1},\ a_{r_1}$$
$$b_{p_2+1},\ b_{p_2+2},\ b_{p_2+3},\ \ldots\ b_{r_2-1},\ b_{r_2}$$
$$c_{p_3+1},\ c_{p_3+2},\ c_{p_3+3},\ \ldots\ c_{r_3-1},\ c_{r_3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$h_{p_h+1},\ h_{p_h+2},\ h_{p_h+3},\ \ldots\ h_{r_h-1},\ h_{r_h}]^q$$

Es kann auch unter folgender Form dargestellt werden

$$2)\quad A = P'[sn;\ a_{p_1+1},\ a_{p_1+2},\ a_{p_1+3},\ \ldots\ a_{r_1}$$
$$a_{p_2+1},\ a_{p_2+2},\ a_{p_2+3},\ \ldots\ a_{r_2}$$
$$a_{p_3+1},\ a_{p_2+2},\ a_{p_3+3},\ \ldots\ a_{r_3}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{p_h+1},\ a_{p_h+2},\ a_{p_h+3},\ \ldots\ a_{r_h}]^q$$

Werden für diese Elementen-Reihen Polynomien eingeführt, so entsteht

$$Q^q = [x^{p_1+1} + x^{p_1+2} + x^{p_1+3} + \ldots . x^{r_1}$$
$$x^{p_2+1} + x^{p_2+2} + x^{p_2+3} + \ldots . x^{r_2}$$
$$x^{p_3+1} + x^{p_3+2} + x^{p_3+3} + \ldots . x^{r_3}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$x^{p_h+1} + x^{p_h+2} + x^{p_h+3} + \ldots . x^{r_h}]^q$$

$$= \left(\frac{x^{p_1+1}-x^{r_1+1}}{1-x} + \frac{x^{p_2+1}-x^{r_2+1}}{1-x} + \frac{x^{p_3+1}-x^{r_3+1}}{1-x} + \ldots \frac{x^{p_h+1}-x^{r_h+1}}{1-x}\right)^q$$

$$= \frac{x^q}{(1-x)^q}\left(x^{p_1}-x^{r_1} + x^{p_2}-x^{r_2} + x^{p_3}-x^{r_3} + \ldots + x^{p_h}-x^{r_h}\right)^q$$

$$= \frac{1}{1^{q-1|1}}(x^q + q^{q-1|-1}x^{q+1} + [q+1]^{q-1|-1}x^{q+2} + [q+2]^{q-1|-1}x^{q+3} + \ldots) \times$$

$$\times\left(x^{p_1 q} - \frac{q}{1}x^{(q-1)p_1}\left(x^{r_1} + x^{r_2} + x^{r_3} + \ldots x^{r_h} - x^{p_2} - x^{p_3} - \ldots - x^{p_h}\right)\right.$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{(q-2)p_1}\left(x^{r_1} + x^{r_2} + x^{r_3} + \ldots x^{r_h} - x^{p_2} - x^{p_3} - \ldots - x^{p_h}\right)^2$$
$$-\frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}x^{(q-3)p_1}\left(x^{r_1} + x^{r_2} + x^{r_3} \ldots x^{r_h} - x^{p_2} - x^{p_3} - \ldots - x^{p_h}\right)^3$$
$$\left.\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\right)$$

**Werden die angezeigten Entwicklungen ausgeführt und wird die Vorzahl von $x^n$ bestimmt, so ergibt sich folgende Darstellung zur Bestimmung der gesuchten Gruppenanzahl**

$$3)\quad A = \frac{1}{1^{q-1|1}}\left((n-p_1 q-1)^{q-1|1-1} - q\left((n-[q-1]p_1-r_1-1)^{q-1|-1} - (n-[q-1]p_1-p_2-1)^{q-2|-1}\right.\right.$$
$$+(n-[q-1]p_1-r_2-1)^{q-1|-1} - (n-[q-1]p_1-p_3-1)^{q-1|-1}$$
$$+(n-[q-1]p_1-r_3-1)^{q-1|-1} - (n-[q-1]p_1-p_4-1)^{q-1|-2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\left.+(n-[q-1]p_1-r_h-1)^{q-1|-1} - (n-[q-1]p_1-p_h-1)^{q-1|-1}\right)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left((n-[q-2]p_1-2r_1-1)+2\left|\begin{array}{l}(n-[q-2]p_1-r_1-r_2-1)^{q-1|-1}+\frac{2.1}{1.2}(n-[q-2]p_1-2r_2-1)^{q-1|-1}\\ +(n-[q-2]p_1-r_1-r_3-1)^{q-1|-1}\\ +(n-[q-2]p_1-r_1-r_4-1)^{q-1|-1}\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ +(n-[q-2]p_1-r_1-r_h-1)^{q-1|-1}\\ -(n-[q-2]p_1-r_1-p_2-1)^{q-1|-1}\\ -(n-[q-2]p_1-r_1-p_3-1)^{q-1|-1}\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ -(n-[q-2]p_1-r_1-p_h-1)^{q-1|-1}\end{array}\right.$$
$$\left.+2\left|\begin{array}{l}(n-[q-2]p_1-r_2-r_3-1)^{q-1|-1}\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ -(n-[q-2]p_1-r_2-p_h-1)^{q-1|-1}\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ +\frac{2.1}{1.2}(n-[q-2]p_1-2p_h-1)^{q-1|-1}\end{array}\right.\right)$$

$$-\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Bigg((n-[q-3]p_1-3r_1-1)^{q-1|-1}+3\begin{vmatrix}(n-[q-3]p_1-2r_1-r_2-1)^{q-1|-1}\\ (n-[q-3]p_1-2r_1-r_3-1)^{q-1|-1}\\ \vdots\quad\vdots\\ -(n-[q-3]p_1-2r_1-p_h-1)^{q-1|-1}\end{vmatrix}+\frac{3.2}{1.2}\begin{vmatrix}(n-[q-3]p_1-r_1-2r_2-1)^{q-1|-1}\ldots\\ +2\begin{vmatrix}(n-[q-3]p_1-r_1-r_2-r_3-1)^{q-1|-1}\\ (n-[q-3]p_1-r_1-r_2-r_4-1)^{q-1|-1}\\ \vdots\quad\vdots\\ -(n-[q-3]p_1-r_1-r_2-p_h-1)^{q-1|-1}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ +(n-[q-3]p_1-r_1-2p_h+1)^{q-1|-1}\end{vmatrix}\\ \vdots\end{vmatrix}\Bigg)$$

**Das Gesetz, welches dieser Darstellung zu Grunde liegt, ist leicht erkennbar. Es läfst sich in Zeichen auf folgende Art ausdrücken**

$$4)\quad A=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Bigg(\sum^{z=m}(-)^{y_2+y_3+y_4+\ldots y_h}\frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}1^{y_2|1}1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}}$$
$$\times\Big(\frac{n-[q-m]p_1-z_1r_1-z_2r_2-z_3r_3-\ldots z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3\ldots-y_hp_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\Big)\Bigg)$$

**Hierin ist allmälig 0, 1, 2, 3, . . . q statt x zu setzen, für jeden einzelnen Werth von x ist nach dem zweiten Σ**

$$x=m=y_2+y_3+y_4+\ldots+y_h+z_1+z_2+z_3+\ldots z_h$$

**beizubehalten. Für m sind alle möglichen Summen der Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, . . . x zu derjenigen Classe zu bilden, welche entsteht, wenn die Gröfsen**

$$y_2, y_3, y_4, \ldots y_h, z_1, z_2, z_3, \ldots z_h$$

**als Einheiten betrachtet werden. Die Gröfsen**

$$y_2, y_3, y_4, \ldots y_h$$

**beziehen sich auf die Stellenzahlen $p_2, p_3, p_4, \ldots p_h$ und**

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots z_h$$

**auf $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_h$.**

**Die Uebereinstimmung der hier gefundenen Formel mit der unter 8 §. 4, Pg. 17 gefundenen zeigt sich leicht. Die Gleichung 9 §. 3 leitet sich aus dieser ab, wenn $p_1=0$ gesetzt wird.**

**Die hier gefundene Gleichung ist sehr allgemein und vieler Anwendung fähig, denn die Stellenzahlen der in Frage kommenden**

Elementen-Reihen sind ganz willkührlich und können defswegen in jeden möglichen Zusammenhang gebracht werden. Daher lassen sich auch die etwaigen Anwendungen auf specielle Fälle leicht machen. Aus ihr lassen sich leicht die Gleichungen ableiten, die in §. 1—3 gefunden wurden, wenn die Elementen-Reihen beschränkt und die Stellenzahl in den dort vorausgesetzten Zusammenhang gebracht werden, welcher den Weg zur Entwicklung der Gleichung 9 §. 3 bahnte. Wir führen jedoch diese Andeutungen nicht weiter aus, sondern wenden uns zur Entwicklung anderer noch nicht behandelter Fälle.

Soll die Anzahl der Gruppen bestimmt werden, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der $q^{ten}$ Classe aus h Elementen-Reihen gebildet werden, deren Stellenzahlen mit der Einheit beginnen, im Uebrigen den in 1 angegebenen Bestimmungen unterliegen, so liegt folgendes Problem vor.

$$5)\quad A = P'[sn;\ \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & a_{r_1} \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \ldots & a_{r_2} \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \ldots & a_{r_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_1, & h_2, & h_3, & h_4, & \ldots & h_{r_h} \end{matrix}]^q$$

Die Gruppenanzahl ergibt sich, wenn in der Darstellung 3 $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_h = 0$ gesetzt wird. Sie ist

$$6)\quad A = \frac{1}{1^{q-1|1}}\Big(h^q(n-1)^{q-1|-1} - qh^{q-1}[(n-r_1-1)^{q-1|-1} + (n-r_2-1)^{q-1|-1} \ldots + (n-r_h-1)^{q-1|-1}]$$
$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{q-2}\Big((n-2r_1-1)^{q-1|-1} + 2\begin{vmatrix} (n-r_1-r_2-1)^{q-1|-1} \\ (n-r_1-r_3-1)^{q-1|-1} \\ \vdots \quad \vdots \\ (n-r_1-r_h-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix} + \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} (n-2r_2-1)^{q-1|-1} \\ +2\begin{vmatrix} (n-r_2-r_3-1)^{q-1|-1} \\ (n-r_2-r_4-1)^{q-1|-1} \\ \vdots \quad \vdots \\ (n-r_2-r_h-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ (n-2r_h-1)^{q-1|-1} \end{vmatrix}\Big)$$
$$\vdots$$
$$= \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} h^{q-x}\Big(\sum^{x=m} \frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}} \frac{(n-z_1r_1-z_2r_2-\ldots z_hr_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\Big)$$

Hierin ist für jeden Werth von x

$$m = x = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots . z_h$$

zu setzen. Die Versetzungen mit Wiederholungen sind für jeden Werth von m zur $h^{ten}$ Classe aus den Elementen 0, 1, 2, . . . x zu den verschiedenen Summen, welche durch m angedeutet werden, zu bilden.

Die gleiche Darstellung hätte sich ergeben, wenn man die nach 5 erforderlichen Polynomien eingeführt und dann die dadurch bedingten Entwicklungen gemacht hätte.

Das in §. 8 Nro. 9 gegebene Problem ist ein specieller Fall des hier vorliegenden. Soll endlich die Anzahl der Gruppen bestimmt werden, welche entstehen, wenn die Schlufselemente der in 1 §. 10 gegebenen Elementen-Reihen sämmtlich einander gleich sind, so liegt folgendes Problem in Frage

$$7)\ A = P'[sn;\ a_{p_1+1},\ a_{p_1+2},\ a_{p_1+3},\ \ldots .\ a_r$$
$$b_{p_2+1},\ b_{p_2+2},\ b_{p_2+3},\ \ldots .\ b_r$$
$$c_{p_3+1},\ c_{p_3+2},\ c_{p_3+3},\ \ldots ,\ c_r$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$h_{p_h+1},\ h_{p_h+2},\ h_{p_h+3},\ \ldots .\ h_r]^q$$

Die gesuchte Gruppenanzahl ergibt sich, wenn in 3, $r_1=r_2=r_3=r_4=\ldots r_h=r$ gesetzt wird. Wird hiebei eine veränderte Ordnung getroffen, so ergibt sich

$$8)\ A = \frac{1}{1^{q-1|-1}}\Big((n-qp_1-1)^{q-1|-1} - q\Big(h(n-[q-1]p_1-r-1)^{q-1|-1} - \Big|\begin{matrix}(n-[q-1]p_1-p_2-1)^{q-1|-1}\\(n-[q-1]p_1-p_3-1)^{q-1|-1}\\\vdots\\(n-[q-1]p_1-p_h-1)^{q-1|-1}\end{matrix}\Big)$$
$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(h^2(n-[q-1]p_1-2r-1)^{q-1|-1} - 2h\Big|\begin{matrix}(n-[q-1]p_1-r-p_2-1)^{q-1|-1}+\ldots\\(n-[q-1]p_1-r-p_3-1)^{q-1|-1}\\\vdots\\(n-[q-1]p_1-r-p_h-1)^{q-1|-1}\end{matrix}\Big)$$
$$\vdots$$
$$=\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\Big(\sum^{x=\omega}(-)^y h^y\ \frac{m^{m_1-1}}{1^{y_1|1}1^{z_2|1}1^{z_3|1}\ldots 1^{z_h|1}}\ \frac{(n-[q-m]p_1-yr-z_2p_2\ldots-z_hp_h-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\Big)$$

Für jeden einzelnen Werth von x ist

$$m = x = y + z_2 + z_3 + z_4 + \ldots . z_h$$

zu setzen. Die Versetzungen mit Wiederholungen zur jedesmaligen Summe m sind in der $h^{ten}$ Classe aus den Elementen 0, 1, 2, ... m zu bilden.

Soll der Inbegriff der Gruppenanzahlen der Summen von s bis n für die unter 1, 5, 7 angeführten Probleme bestimmt werden, so ergeben sich dieselben leicht, wenn die bezüglichen Fakultäten in 3, 6 und 8 um die Einheit erhöht werden. Es ist dann für das unter 1 gegebene Problem

$$9)\ \sum_{s+1}^{n} A =$$

$$\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=m}(-)^{y_2+y_3+\ldots y_h}\frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots.1^{y_h|1}} \times \frac{(n-[q-m]p_1-z_1r_1-z_2r_2-z_3r_3-\ldots z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3\ldots-y_hp_h)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$-\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\left(\sum^{x=m}(-)^{y_2+y_3+\ldots y_h}\frac{m^{m-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}.1^{z_3|1}\ldots 1^{z_h|1}1^{y_2|1}.1^{y_3|1}\ldots 1^{y_h|1}} \times \frac{(s-[q-m]p_1-z_1r_1-z_2r_2-z_3r_3\ldots z_hr_h-y_2p_2-y_3p_3\ldots-y_hp_h)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

Die hierher gehörigen Bedingungsgleichungen sind die nämlichen, welche bei 4 angegeben wurden.

Aus 6 ergibt sich

$$10)\ \sum_{s+1}^{n} A = \sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}h^{q-x}\left(\sum^{x=m}\frac{m^{m-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}\ldots 1^{z_h|1}}\frac{(n-z_1r_1-z_2r_2-\ldots z_hr_h)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

$$-\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}h^{q-x}\left(\sum^{x=m}\frac{m^{m|-1}}{1^{z_1|1}1^{z_2|1}1^{z_3|1}\ldots 1^{z_h|1}}\frac{(s-z_1r_1-z_2r_2-\ldots-z_hr_h)^{q|-1}}{1^{q|1}}\right)$$

Die dort gegebenen Bedingungsgleichungen sind auch hier gültig.

Aus 8 ergibt sich

$$11)\ \sum_{s+1}^{n} A = \sum_{x=0}^{x=l} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^y h^y \frac{m^{m-1}}{1^{y|1}\, 1^{z_2|1}\, 1^{z_3|1} \ldots 1^{z_h|1}} \right.$$

$$\left. \times \frac{(n-[q-m]p_1 - yr - z_2p_2 - \ldots\ldots - z_hp_h)^{q|-1}}{1^{q|1}} \right),$$

$$- \sum_{x=0}^{x=l} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \left( \sum^{x=m} (-)^y h^y \frac{m^{m|-1}}{1^{y|1}\, 1^{z_2|1}\, 1^{z_3|1} \ldots 1^{z_h|1}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(s-[q-m]p_1 - yr - z_2p_2 - z_3p_3 - \ldots\ldots - z_hp_h)^{q|-1}}{1^{q|1}} \right)$$

Die zu 8 angegebenen Bedingungsgleichungen bleiben auch hier in Kraft.

Der Rückblick auf die beiden hier vorgelegten Methoden zeigt, dafs beide gleich allgemein sind, denn beide führen zu denselben allgemeinen Gleichungen. Die zweite hat besonders ihren Vorzug darin, dafs sie sich sehr bequem und geschickt auf specielle Fälle anwenden läfst und dabei sehr elegante Gleichungen liefert, die vielleicht mit ungleich gröfserer Mühe nach der ersten Methode aufgesucht werden müfsten.

## §. 11.

Die Anwendungen, welche die bisher aufgefundenen Gleichungen auf Wahrscheinlichkeits-Rechnung zu lassen, sind leicht zu erkennen, denn jede Darstellung, welche die Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe in irgend einer Classe, oder den Inbegriff mehrerer Summen in irgend einer Classe angibt, beantwortet zugleich ein Problem aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Für diesen Fall ist nämlich nur noch übrig, die gefundene Gruppenanzahl durch die Anzahl aller Gruppen oder durch den Inbegriff aller Summen in irgend eine Classe zu theilen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus sämmtlichen Elementen in dieser Classe gebildet werden.

Die zunächst liegenden Anwendungen sind die auf die Würfel und das Würfelspiel.

Die Würfel (von sechs gleich grofsen Quadraten eingeschlossene, gleich dichte Körper) sind bekanntlich auf ihren verschiedenen Seiten mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet. Wird mit einem Würfel wiederholt geworfen, so läfst sich dieses Werfen mit Ziehungen vergleichen, welche wiederholt aus einer Urne gemacht werden, worin sechs Kugeln enthalten sind, von denen jede eine von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Zeichen trägt, und jede nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Das gleichzeitige Spielen mit mehreren Würfeln läfst sich als ein gleichzeitiges Ziehen je einer Kugel aus mehreren Urnen betrachten, von denen jede sechs Kugeln der bezeichneten Art enthält.

Wird nämlich mit zwei oder mehreren Würfeln geworfen, so können Würfe von verschiedenem Werthe oder verschiedenen Summen fallen, die ganz dem Zufalle unterliegen, bei deren Entstehung aber nicht alle, sondern nur sechs Zahlen mitwirken können. Es kommen daher hiebei die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer beschränkten Elementen-Anzahl in Betrachtung.

Wird nun mit p Würfeln geworfen, und gefragt: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die geworfenen Zahlen die Summe n betragen? So fällt die Zahl der günstigen Fälle mit der Anzahl der Gruppen zusammen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus sechs Elementen in der $p^{ten}$ Classe gebildet werden.

Diese Anzahl bestimmt sich leicht, wenn in der Gleichung 6 §. 1 $n=n$, $r=6$, $p=q$ gesetzt wird. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn dieser Ausdruck durch die Anzahl aller Gruppen gemessen wird, welche bei Bildung der Versetzungen mit Wiederholungen aus sechs Elementen in der $p^{ten}$ Classe entstehen. Hiernach ist

$$1)\ w=\frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}6^{p}}-p\frac{(n-7)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}6^{p}}+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|}}\frac{(n-13)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}6^{p}}-\frac{p^{3|-1}}{1^{3|}}\frac{(n-19)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}6^{p}}+\ldots\ldots$$

Specielle Fälle bestimmen sich hieraus leicht. So ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln die Summe 10 oder 11 zu werfen

$\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$ die Summe 5 oder 16 zu werfen $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ und es kann jemand Eins gegen Eins wetten, dafs er in acht Würfen einmal die Summe 10, oder dafs er in 36 Würfen einmal die Summe 5 treffen werde. Dasselbe gilt von den Summen 11 und 16. Oder es kann jemand Eins gegen Sieben wetten, dafs er in einem Wurfe die Summe 10 und Eins gegen 35, dafs er die Summe 5 mit drei Würfeln treffen werde.

Wird mit acht Würfeln geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit die Summe 28 zu werfen $\frac{135954}{1679616}$, eine der Summen 40 oder 16 zu werfen $\frac{6147}{1679616} = \frac{683}{186624}$; eine der Summen 9 oder 47 zu werfen $\frac{8}{1679616} = \frac{1}{209952}$ eine der Summen 1 oder 48 zu werfen $\frac{1}{1679616}$ u. s. w. Es kann daher jemand mit geringem Vortheile Eins gegen Eins wetten, dafs in 274 Würfen einmal die Summe 16 fallen werde, oder Eins gegen 273, dafs er sie im ersten Wurfe werfen werde, oder Eins gegen 209951, dafs er die Summe 9 im ersten Wurfe treffen werde u. s. w. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten anderer Fälle läfst sich mit der Gleichung 1 leicht weiter verfolgen.

Wird die Gleichung 6 §. 1 benützt, $r = 6$ und für q die Anzahl der Würfel gesetzt und werden dann für jede bestimmte Würfel-Anzahl allmälig die verschiedenen Summen statt n eingeführt, so ergibt sich dadurch eine Zusammenstellung für die Zahl der Würfe, welche bei einer bestimmten Summe mit irgend einer beliebigen Würfel-Anzahl gemacht werden können. Diese Zusammenstellung ist in der beifolgenden Tafel enthalten.

| Summen, welche mit einem, 2, 3, 4, 5, 6, 7 oder 8 Würfeln geworfen werden können. | Zahl der Würfel. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 7 | | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 8 | | 5 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |
| 9 | | 4 | 25 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 |
| 10 | | 3 | 27 | 80 | 126 | 126 | 84 | 36 |
| 11 | | 2 | 27 | 104 | 205 | 252 | 210 | 120 |
| 12 | | 1 | 25 | 125 | 305 | 456 | 462 | 330 |
| 13 | | | 21 | 140 | 420 | 756 | 917 | 792 |
| 14 | | | 15 | 146 | 540 | 1161 | 1667 | 1708 |
| 15 | | | 10 | 140 | 651 | 1666 | 2807 | 3368 |
| 16 | | | 6 | 125 | 735 | 2247 | 4417 | 6147 |
| 17 | | | 3 | 104 | 780 | 2856 | 6538 | 10480 |
| 18 | | | 1 | 80 | 780 | 3431 | 9142 | 16808 |
| 19 | | | | 56 | 735 | 3906 | 12117 | 25488 |
| 20 | | | | 35 | 651 | 4221 | 15267 | 36688 |
| 21 | | | | 20 | 540 | 4332 | 18327 | 50288 |
| 22 | | | | 10 | 420 | 4221 | 20993 | 65808 |
| 23 | | | | 4 | 305 | 3906 | 22967 | 82384 |
| 24 | | | | 1 | 205 | 3431 | 24017 | 98813 |
| 25 | | | | | 126 | 2856 | 24017 | 113688 |
| 26 | | | | | 70 | 2247 | 22967 | 125588 |
| 27 | | | | | 35 | 1666 | 20993 | 133288 |
| 28 | | | | | 15 | 1161 | 18327 | 135954 |
| 29 | | | | | 5 | 756 | 15267 | 133288 |
| 30 | | | | | 1 | 456 | 12117 | 125588 |
| 31 | | | | | | 252 | 9142 | 113688 |
| 32 | | | | | | 126 | 6538 | 98813 |
| 33 | | | | | | 56 | 4417 | 82384 |
| 34 | | | | | | 21 | 2807 | 65808 |
| 35 | | | | | | 6 | 1667 | 50288 |
| 36 | | | | | | 1 | 917 | 36688 |
| 37 | | | | | | | 462 | 25488 |
| 38 | | | | | | | 210 | 16808 |
| 39 | | | | | | | 84 | 10480 |
| 40 | | | | | | | 28 | 6147 |
| 41 | | | | | | | 7 | 3368 |
| 42 | | | | | | | 1 | 1708 |
| 43 | | | | | | | | 792 |
| 44 | | | | | | | | 330 |
| 45 | | | | | | | | 120 |
| 46 | | | | | | | | 36 |
| 47 | | | | | | | | 8 |
| 48 | | | | | | | | 1 |

Die Zahl der Würfel erhebt sich bis auf acht und die Summen bis auf 48. Die Einrichtung der Tafel selbst ist leicht verständlich. Um die Zahl der Fälle, wie oft eine bestimmte Zahl mit einem oder mehreren Würfeln geworfen werden kann, in dieser Tafel zu finden, ist nöthig die fragliche Summe in der vordersten Vertikalreihe, und die Zahl der Würfel in der obersten Horizontalreihe zu suchen, beide bis zu dem Felde, wo sie sich vereinigen, zu verfolgen. Die diesem Felde eingezeichnete Zahl gibt die gesuchte Anzahl an. *)

Wird die Gleichung 11 §. 4, Pg. 19 benützt, so wird der Inbegriff der Gruppenanzahlen für Summen, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, gewonnen. Soll nämlich bestimmt werden, wie grofs die Wahrscheinlichkeit ist, dafs nur die Summen von m his n erscheinen, wenn mit p Würfeln geworfen wird, so ergibt sich diefs, wenn in der genannten Gleichung zuerst $q=p$, $r=6$, dann wiederholt $q=p$, $r=6$ und $n=m$ gesetzt, die erhaltenen Resultate durch $6^p$ gemessen werden und das letzte Resultat von dem ersten abgezogen wird. Hiernach ist

$$2)\, w = \sum (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(n-6x)^{p|-1}}{1^{p|1} 6^p} - \sum (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(m-6x)^{p|-1}}{1^{p|1} 6^p}$$

oder

*) Montmort hat in seinem Werke: Analyse sur les jeux de hazards II. ed. Par. 1714 Pg. 51 eine Tafel mitgetheilt, die sich bis auf die Würfe mit 5 Würfeln erstreckt, jedoch nicht ganz vollständig ist. Pg. 203 in demselben Werke ist eine vollständige, sich bis auf die Würfe mit neun Würfeln erstreckende Tafel mitgetheilt. Jac. Bernoulli hat in seinem Werke: Ars conjectandi Basil. 1713 Pg. 24 auch eine Tabelle gegeben, die sich bis auf Würfe mit sechs Würfeln erstreckt, aber auch nicht ganz vollständig ist. Die dort gegebenen Resultate sind auf Addition aus niedern Summen gegründet. Auch in Klügels mathemat. Wörterbuche V. Band 2. Abtheilung findet sich Pg. 927 eine nicht ganz vollständige Tafel, die sich auf Würfe mit acht Würfeln erhebt. Die Zahlen der hier mitgetheilten Formel sind nach der Gleichung 6 §. 1 berechnet.

$$3)\ w=\frac{n^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-p\frac{(n-6)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\frac{p(p-1)}{1\ .\ 2}\frac{(n-12)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\frac{p(p-1)(p-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\frac{(n-18)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\ldots$$

$$-\frac{m^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+p\frac{(m-6)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\frac{p(p-1)}{1\ .\ 2}\frac{(m-12)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\frac{(m-18)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\ldots.$$

**Die vorstehenden Gleichungen schliefsen die Summen m+1, m+2, m+3 . . . n ein.**

**A und B spielen mit p Würfeln unter folgender Bedingung miteinander: A gewinnt, wenn das arithmetische Mittel zwischen der höchsten und niedrigsten Summe oder eine höhere Summe fällt; B, wenn eine der niedrigern Summen fällt. Welches ist das Verhältnifs der Hoffnung beider zu einander?**

**Ist die Zahl der Würfel, womit gespielt wird, ungerade, so ist das arithmetische Mittel $3p+\frac{1}{2}p$, folglich eine gebrochene Zahl. Diese Summe kann nicht geworfen werden. Das Loos der Spieler ist für diesen Fall gleich. Diefs bestätigt sich auch durch Ansicht der vorliegenden Tabelle. Ist aber die Zahl der Würfel gerade, so ist das arithmetische Mittel $3p+\frac{1}{2}p$ also eine Summe die geworfen werden kann. Der höchste Wurf, welcher in diesem Falle möglich ist, wird 6p seyn. Der Mittelwurf wird seyn $3p+\frac{1}{2}p=a+1$. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit für A.**

$$4)\ w=\frac{(6p)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-p\frac{([p-1]6)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|}1}\frac{([p-2]6)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\ldots$$

$$-\frac{a^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+p\frac{(a-6)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\frac{p^{2|-1}}{1^{2|}1}\frac{(a-12)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\ldots$$

**oder**

$$w=1-\frac{(3p+\frac{1}{2}p-1)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+p\frac{(3p+\frac{1}{2}p-7)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\frac{p^{2|-1}}{1^{2|}1}\frac{(3p+\frac{1}{2}p-13)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\ldots$$

**Die Wahrscheinlichkeit für B ist**

$$5)\ w=\frac{(3p+\frac{1}{2}p-1)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-p\frac{(3p+\frac{1}{2}p-7)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|}1}\frac{(3p+\frac{1}{2}p-13)^{p|-1}}{1^{p|}6^{p}}-\ldots\ *)$$

---

*) Johann Bernoulli hat die vorstehende Aufgabe im 4. Bande seiner Opp. omn, Lausannae et Genevae 1742 Pg. 31 und 32 aufgestellt, und das Resultat der Auflösung ohne Entwicklung mitgetheilt. Die von ihm gegebene Auflösung ist ganz unrichtig. Er sagt das Verhältniss beider Wahrscheinlichkeiten sey (in unserer Bezeichnung dargestellt)

Wird mit 2 Würfeln geworfen, so ist das Verhältnifs beider Wahrscheinlichkeiten $\frac{21}{36}$: $\frac{15}{36}$; bei vier Würfeln ist es $\frac{721}{1296}$: $\frac{575}{1296}$ bei sechs Würfeln ist es $\frac{25494}{46656}$: $\frac{21162}{46656}$ u. s. w. Bei näherer Untersuchung zeigt sich, dafs sich das Verhältnifs der Wahrscheinlichkeiten immer mehr verkleinert, je gröfser die Zahl der Würfel ist, mit denen geworfen wird, und dafs sich also die Hoffnung beider immer mehr der Gleichheit nähert, je gröfser die Zahl der Würfel wird, ohne in der That sich gleich zu werden.

A spielt mit B unter folgender Bedingung mit acht Würfeln. A gewinnt, wenn eine der Nummern 21, 22, ... 35 fällt; B, wenn eine der übrigen fällt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für A, welches für B?

Die Wahrscheinlichkeit für A ergibt sich, wenn $p=35$, $p=8$ und $m=20$ in 3 gesetzt wird. Sie ist

$$6)\ w=\frac{1}{1^{8|1}6^{8}}\left(35^{8|-1}-8.29^{8|-1}+28.23^{8|-1}\ldots-20^{8|-1}+8.14^{8|-1}-28.8^{8|-1}\right)=\frac{1475668}{1679616}$$

Die Wahrscheinlichkeit für B ist

$$7)\ w_1=1-w=\frac{203948}{1679616}$$

Setzt nun B bei jedem Wurfe eine bestimmte Summe aus, so wird er sie an A verlieren, so oft eine der Zahlen 21—35 geworfen wird. Soll nun das Spiel gerecht seyn, so mufs er von A die eingesetzte Summe $\frac{1475668}{203948}=7\frac{48032}{203948}$ mal gewinnen, so oft eine der übrigen, ihm günstigen Zahlen fällt.

Diefs Spiel kommt vor und bildet dann die Grundlage für die sogenannten Würfeltische, die hie und da aufgestellt sind, um von der

---

$$6^p+\frac{(3p+\frac{1}{2}p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}:6^p-\frac{(3p+\frac{1}{2}p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

was mit der hier gegebenen richtigen Auflösung nicht harmonirt. Eine andere Auflösung dieses Problems habe ich in meinen Forschungen in der höh. Anal. Pg. 63 u. s. f. mitgetheilt und dort das Nähere hierüber nachgewiesen.

Spiellust Vortheil zu ziehen. Die Einrichtung dieser Würfeltische ist dann folgende. Auf einem Tische sind in Kreisform, wie die Ziffern auf einer Uhrentafel, die Zahlen von 8 bis 48 aufgezeichnet, jedoch nicht in der natürlichen Reihenfolge, sondern ganz willkührlich neben einander geschrieben. Die 15 Nummern von 21 bis 35 etwa sind nicht besetzt, dagegen die übrigen 26 mit bestimmten Preisen bezeichnet, oder mit anlockenden werthvollen Gegenständen, in verschiedenen Abstufungen, besetzt. Will jemand sein Glück versuchen, so mufs er eine bestimmte Einlage geben, die er dann nach dem Wurfe auch im Falle des Gewinnens nicht mehr zurück erhält. Wird nun ein stufenförmiges Steigen der Preise für solche Würfeltische angeordnet, so könnte dann, um ein gerechtes Spiel zu erhalten, folgendes gewählt werden:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Für | jede | der | Zahlen | 20 | und | 36 | zahlt | der | Spielhalter | 1 | mal | den | Einsatz | |
| „ | „ | „ | „ | 19 | „ | 37 | „ | „ | „ | 2 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 18 | „ | 38 | „ | „ | „ | 3 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 17 | „ | 39 | „ | „ | „ | 4 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 16 | „ | 40 | „ | „ | „ | 8 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 15 | „ | 41 | „ | „ | „ | 16 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 14 | „ | 42 | „ | „ | „ | 32 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 13 | „ | 43 | „ | „ | „ | 100 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 12 | „ | 44 | „ | „ | „ | 300 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 11 | „ | 45 | „ | „ | „ | 500 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 10 | „ | 46 | „ | „ | „ | 1000 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 9 | „ | 47 | „ | „ | „ | 10000 | „ | „ | „ | |
| „ | „ | „ | „ | 8 | „ | 48 | „ | „ | „ | 50000 | „ | „ | „ | (ungef.) |

als reinen Gewinn aus. Bei dieser Vertheilung ist noch immer ein nicht unbedeutender Vortheil auf Seiten des Spielhalters. Dieser Vortheil steht aber mit demjenigen, welchen solche Spieltische in der Wirklichkeit abwerfen, in gar keinem Verhältnisse, wenn man bedenkt, dafs der Werth sämmtlicher von dem Spielhalter ausgesetzten Preise kaum dem 2000fachen höchstens dem 3000fachen Einsatz des Spielers gleichkommt. Solche Spieltische beruhen daher auf sehr ungerechter Grundlage, wuchern mit dem Besitze der

Spielenden auf die auffallendste Weise, sollten daher in keinem Staate geduldet werden, und es ist Pflicht jeder Obrigkeit, sie ganz zu unterdrücken.

Ein anderes hierher gehöriges, sehr verbreitetes Spiel ist das sogenannte Knöcheln (passe dix). Dieses Spiel wird mit drei Würfeln von einer beliebigen Zahl von Theilnehmern gespielt. Einer derselben, Banquier genannt, hat die Hand und setzt eine beliebige Summe aus, die von einem oder mehreren zugleich entgegen gehalten wird. Darauf wirft der Banquier die Würfel aus einem Becher. Fällt ein Wurf, der 11 oder darüber beträgt, worin wenigstens zwei gleiche Zahlen, Pasch genannt, vorkommen, so hat der Banquier gewonnen. Er zieht in diesem Falle die ganze ausgesetzte Summe. Er kann nun das Spiel fortsetzen, und mufs dann die ganze Summe im Spiele stehen lassen, oder kann dieselbe zurückziehen und mufs dann den Becher seinem Nachfolger überlassen. Fällt aber ein Wurf der zehn und darunter beträgt, worin wenigstens zwei gleiche Zahlen vorkommen, so hat er die ganze Summe verloren. Das Spiel geht dann an seinen Nachfolger über, der es unter den genannten Bedingungen fortsetzt. Ein Wurf, worin nicht wenigstens zwei gleiche Zahlen vorkommen, entscheidet über das Spiel nicht.

Fragt man nun, wie grofs die Wahrscheinlichkeit ist, mit drei Würfeln die Summe zehn oder eine höhere zu werfen, so ergibt sich aus 3

$$w = \frac{1}{1.2.3.6^3}\,[18.17.16 - 3.12.11.10 + 3.6.5.4 - 10.9.8 + 3.4.3.2] = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfel die Summe zehn und eine niedrigere zu werfen ist nach derselben Gleichung

$$w = \frac{1}{1.2.3.6^3}\,[10.9.8 - 3.4.3.2] = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

Man erkennt, dafs beide Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, dafs also hier kein Vortheil vorherrscht. Da aber nur die Würfe, worin wenigstens zwei gleiche Zahlen erscheinen, über Ge-

winn und Verlust entscheiden, so ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, wie oft ein Pasch erscheinen werde.

Diese Wahrscheinlichkeit bestimmmt sich leicht, wenn man diejenige Würfe angibt, worin keine gleiche, sondern lauter ungleiche Zahlen bei dem Spielen mit drei Würfeln erscheinen werden, und das gefundene Resultat von der Einheit abzieht. Hiernach ist

$$8)\ w = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$$

Untersucht man nun, wie oft in den Summen von 11 bis 18 und von 3 bis 10 wenigstens zwei gleiche Zahlen vorkommen können, so ergibt sich aus einer ganz einfachen Betrachtung, dafs die Anzahl derjenigen Fälle, worin in den Summen von 11 — 18 wenigstens zwei gleiche Zahlen vorkommen, gerade so grofs ist, als diejenige, worin in den Summen von 3 — 10 wenigstens zwei gleiche vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein für den Banquier günstiges Resultat erscheinen werde, ist demnach $= \frac{1}{2}$ und eben so grofs, als diejenige, dafs ein für den Spieler günstiges erscheinen werde.

Dieses Spiel beruht dem Gesagten zufolge auf ganz richtiger Grundlage und der Banquier hat vor dem Mitspieler durchaus keinen Vortheil. In dieser Beziehung kann dem Spiele kein Vorwurf gemacht werden. Die Lockungen jedoch, die mit ihm verbunden sind, die Möglichkeit, mit kleinen Einlagen hohe Summen zu gewinnen, da die ausgesetzten Summen in geometrischer Progression steigen, und der Umstand, dafs ein Spieler durch Ueberlegung und Scharfblick bevorstehenden Verlust nicht von sich abwenden oder mindern kann, charakterisiren es zu einem die Leidenschaft sehr aufregenden und deswegen gefährlichen Spiele, das mit Recht nicht geduldet wird.

Untersuchen wir die Gleichung 8 näher, so zeigt sie, wie oft wenigstens zwei gleiche Zahlen mit drei Würfeln werden geworfen werden. Nach ihr kann jemand Eins gegen Eins wetten, dafs in neun Würfen viermal ein Pasch oder drei gleiche Zahlen sich zeigen

werden, oder was dasselbe ist: jemand kann 4 gegen 5 wetten, dafs in einem Wurfe wenigstens zwei gleiche Zahlen fallen werden. Es kann daher jemand mit einigem Vortheile Eins gegen Eins wetten, dafs er in fünf Würfen zweimal wenigstens zwei gleiche Zahlen werfen werde.

Bei dem Knöcheln werden öfters Würfe vorkommen, welche das Spiel nicht entscheiden. Fragt man daher, wie grofs die Wahrscheinlichkeit ist, dafs das Spiel im zehnten Wurfe noch nicht entschieden seyn werde, so bestimmt sich diese dadurch leicht, dafs zehnmal hintereinander lauter ungleiche Zahlen geworfen werden müssen, um dieser Voraussetzung zu genügen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{5^{10}}{9^{10}} = \frac{9765625}{3486784401}$$

Der Werth dieses Bruches ist zwischen 0,0028 und 0,0030 eingeschlossen, und man kann daher mit Vortheil 343 gegen 1 wetten, dafs das Spiel in zehn Würfen entschieden seyn werde.

## §. 12.

In einer Urne sind r, mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . . . r bezeichnete Kugeln enthalten. Es wird q mal gezogen, jedesmal eine Kugel herausgenommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Zahlen der gezogenen Kugeln die Summe n betragen?

Die Zahl der günstigen Fälle ist unmittelbar durch die Gleichung 6 §. 1 gegeben. Die Zahl aller möglichen Fälle ist $r^q$. Hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1)\ w = \sum_{x=0}^{x=q} (-)^x \frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}} \frac{(n-xr-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1,1}r^q}$$

Durch eine kleine Aenderung dieser Gleichung läfst sich eine Anwendung auf unser Zahlensystem machen.

In einer Urne sind alle Zahlen enthalten, welche q Ziffern oder weniger haben. Man zieht einmal. Wie grofs ist die Wahrschein-

licheit, dafs eine Zahl erscheint, deren Ziffern zusammen die Summe n bilden?

Unserm Zahlensystem liegen die Versetzungen mit Wiederholungen aus zehn erzeugenden Elementen zu den verschiedenen Classen zu Grunde die Stellenzahlen der erzeugenden Elemente beginnen aber mit 0. Die Zahl der günstigen Fälle ist daher in folgendem Ausdrucke begriffen

$$P'[sn; a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_9]^q$$

Hiernach ist die Gleichung 2 §. 4, Pg. 15 und die Gleichung 1 dieses §. anzuwenden, und n+q statt n in letzterer zu setzen. Die Anzahl aller möglichen Zahlen, welche q oder weniger Ziffern haben, ist bekanntlich $10^q - 1$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$2)\, w = \frac{1}{1^{q-1|1}(10^q-1)}\left[(n+q-1)^{q-1|-1} - q\,(n+q-11)^{q-1|-1} + \frac{q(q-1)}{1\,.\,2}(n+q-21)^{q-1|-1}\ldots\right]$$

Sind in einer Urne die Zahlen von 1 bis 9999 enthalten, und will jemand eine Zahl, deren Ziffern die Summe 30 betragen, ziehen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs er seinen Wunsch erreichen werde $\frac{84}{9999}$ oder nahe $\frac{1}{119}$. Soll eine Zahl, deren Ziffern die Summe 12 betragen, gezogen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{415}{9999}$ oder nahe $\frac{1}{24}$

In einer Urne sind alle Zahlen enthalten, welche q und weniger Ziffern haben. Man zieht eine Zahl. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Zahl erscheint, deren Ziffern die Summe n betragen und worin die Zahlen 5 und 6 nicht vorkommen? Die Zahl der günstigen Fälle ist durch folgende Darstellung

$$P'[sn; a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_9]^q$$

bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn nach den oben gemachten Bemerkungen $n = n + q$, $p = 10$, $h = 5$, $k = 7$ in der Gleichung 5 §. 3, Pg. 12 gesetzt und das erhaltene Resultat durch 10 -1 gemessen wird. Sie ist

$$3)\ w=\frac{1}{1^{q-1|1}(10^q-1)}\Big((n+q-1)^{q-1|-1}-q[(n+q-6)^{q-1|-1}-(n+q-8)^{q-1|-1}+(n+q-11)^{q-1|-1}]$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big((n+q-11)^{q-1|-1}-2\begin{vmatrix}(n+q-13)^{q-1|-1}\\-(n+q-16)^{q-1|-1}\end{vmatrix}+\frac{2.1}{1.2}\begin{vmatrix}(n+q-15)^{q-1|-1}\\-2(n+q-18)^{q-1|-1}\\+(n+q-21)^{q-1|-1}\end{vmatrix}\Big)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\Big)$$

**Sind in einer Urne die 9999 ersten Zahlen enthalten und will jemand unter der genannten Bedingung eine Zahl ziehen, deren Ziffern die Summe 12 betragen, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{207}{9999}$ oder nahe $\frac{1}{48}$, denn es sind nur 207 günstige Fälle unter 9999.**

**In einer Urne sind h Arten von Kugeln enthalten, von denen die erste r Kugeln zählt, die mit den r ersten Zahlen bezeichnet sind, die zweite (r-1) Kugeln, die mit den Zahlen 2, 3, 4, . . . r bezeichnet sind u. s. f., die $h^{te}$ Art r Kugeln zählt, die mit den Zahlen h, h+1, h+2, . . . r bezeichnet sind. Man zieht qmal und nimmt jedesmal eine Kugel heraus, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs solche Kugeln gezogen werden, deren Zahlen die Summe n hervorbringen?**

**Die Zahl der dem Unternehmen günstigen Fälle ist in den Gleichungen 1, 7 und 8 §. 7 angegeben. Die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln ist $\frac{h(h+1)}{1.2}+hr=\frac{h(h+2r+1)}{2}$. Die Zahl aller möglichen Fälle ist hiernach $\frac{h^q(h+2r+1)^q}{2^q}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demzufolge aus 7 Pg. 31.**

$$4)\ w=\frac{2^q}{(h+2r+1)^q}\Big(\frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}-\frac{q}{1}\Big(\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}+\frac{(n+q-r-2)^{2q-2|-1}}{h^{q-1}1^{2q-2|1}}\Big)$$

$$+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big(\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}+2\frac{(n+q-h-r-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}h^{q-1}}+\frac{(n+q-2r-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}h^{q-2}}\Big)$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\Big)$$

Sind von der ersten Kugelart nur h Kugeln und von der letzten nur eine in der Urne enthalten, und die Bedingungen die gleichen, wie oben, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs die Zahlen der gezogenen Nummern die Summe n bilden werden, wenn h=r in 4 gesetzt wird, wodurch die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln in $\frac{h(h+1)}{2}$ übergeht, nnd mit Rücksicht auf 15 Pg. 33

$$5)\ w=\frac{2^q}{(h+1)^q}\left(\frac{(n+q-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}-q\left(\frac{(n+q-h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}+\frac{(n+q-h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}h^{q-1}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{q^{2|-1}}{1^{2,1}}\left(\frac{(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}h^q}+2\frac{(n+q-2h-2)^{2q-2|-1}}{1^{2q-2|1}h^{q-1}}+\frac{(n+q-2h-3)^{2q-3|-1}}{1^{2q-3|1}h^{q-2}}\right)\right.$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\left.\right)$$

In einer Urne sind h Kugelarten enthalten, von denen die erste (2h-1), die zweite (2h-3), die dritte (2h-5) u. s. w., die letzte eine Kugel zählt. Die Kugeln der ersten Art sind mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 2h-1, die der zweiten mit den Zahlen 2, 3, 4, ... 2h-2 bezeichnet u. s. w., die Kugel der letzten Art ist mit h bezeichnet. Oder: in einer Urne sind h Kugeln enthalten, von denen eine die Zahl 1, zwei die Zahl 2, drei die Zahl 3 u. s. w., h die Zahl h, (h-1) die Zahl h+1, (h-2) die Zahl (h+2) u. s. w., drei die Zahl 2h-3, zwei die Zahl 2h-2 und eine die Zahl 2h-1 tragen. Man zieht qmal aus der Urne und nimmt jedesmal eine Kugel heraus, die nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird, und bemerkt die ihr aufgezeichnete Zahl. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dass die auf den Kugeln erscheinenden Zahlen die Summe n betragen?

Die Zahl der dem Unternehmen günstigen Fälle ist durch die Darstellung 1 §. 9, Pg. 41 bezeichnet und dort in der Gleichung 3 und 4 bestimmt. Die Zahl aller möglichen Fälle ist $(h^2)^q$. Hieraus ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$6)\ w=\frac{1}{1^{2q-1|1}h^{2q}}[(n+q-1)^{2q-1|-1}-2q(n+q-h-1)^{2q-1|-1}+(2q)^{2|-1}(n+q-2h-1)^{2q-1|-1}\ldots]$$

Diese Fragen können nach den bisherigen Bemerkungen mit

Hülfe der in den §§. 6 bis 10 angegebenen Methode und gefundenen Gleichungen leicht vermehrt werden, besonders wenn noch der Inbegriff mehrerer Summen in Betrachtung gezogen wird. Wir gehen jedoch zu weitern wichtigern Anwendungen über.

Diese ergeben sich insbesondere, wenn die Elemente, woraus die Summen erzeugt werden, unendlich viele werden und dabei in einer bestimmten Grenze eingeschlossen bleiben. Für diesen Fall wird die Gesammt-Zahl jedem einzelnen Elemente gegenüber unendlich grofs. Hiemit werden aber auch die Summen unendlich viele und erheben sich bis zu der höchsten Grenze, welche durch das Product der Classenzahl und der Elementen-Grenze-Zahl angegeben wird. Werden nun die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Summen unter den genannten Bedingungen bestimmt, so folgert sich hieraus nothwendig, dafs die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Fall verschwindend klein seyn mufs, da es unendlich viele gibt und alle zusammen der Gewifsheit $=1$ gleichkommen. Hiernach wird die Wahrscheinlichkeit für den einzelnen Fall durch das Differenzial in Beziehung auf das Verhältnifs der Summe zu der Elementengrenze ausgedrückt werden.

Wenden wir nun diese Bemerkungen auf die in diesem §. gegebenen Gleichungen an, so ist zu berücksichtigen, dafs in ihnen sofort die endlichen Gröfsen den unendlichen gegenüber verschwinden, und die Fakultäten in Potenzen übergehen. Die Gleichung 1 geht sofort, wenn $\frac{n}{r}=s$ gesetzt wird, in folgende über

$$7)\ w=\frac{1}{1^{q-1|1}}\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}(s-x)^{q-1}\right)ds$$

die Gleichung 5, wenn $\frac{n}{h}=s$ gesetzt wird, in folgende

$$8)\ w=2^q\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\frac{(s-[y+z])^{2q-x|-1}}{1^{2q-x-1|1}}\right)ds$$

Hierin kann x die Werthe 0, 1, 2, 3, . . . . q durchlaufen. Für jeden einzelnen Werth von x ist aber $y+z=x$ nach dem zweiten

Σ zu setzen, während y+z die verschiedenen Summen zur zweiten Classe bilden, wenn sie getrennt erscheinen.

Aus der Gleichung 6 wird unter denselben Bedingungen

$$9)\ w=\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{(2q)^{x|-1}}{1^{x|1}}\frac{(s-x)^{2q-1|-1}}{1^{2q-1|1}}\right)ds$$

Mit diesen Gleichungen werden wir noch anderweitige Fragen, als die bisherigen, zu beantworten im Stande seyn.

Setzen wir den Fall, irgend eine Ursache kann innerhalb bestimmter Grenzen in allen möglichen Richtungen, oder für irgend einen Zweck in allen gedenkbaren Abstufungen wirken, so werden die Richtungen oder Zwecke u. s. w, selbst wieder bestimmten Beschränkungen, oder Grenzen unterliegen können, und es kann die Frage entstehen: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die durch eine solche Ursache hervorgebrachte Wirkung innerhalb bestimmte Grenzen eingeschlossen seyn werde?

Zur Beantwortung dieser Fragen wird nöthig seyn, die Gröfse aller Wahrscheinlichkeiten zwischen bestimmten Grenzen anzugeben. Diefs geschieht durch Aufsuchung der Integrale für die vorstehenden Differenziale innerhalb bestimmter Grenzen. Werden diese Grenzen durch m und n vorgestellt, so sind die Gleichungen in Beziehung auf m und n zu integriren. Geschieht diefs, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus der Gleichung 7

$$10)\ w=\frac{1}{1^{q-1|1}}\int_m^n\left[\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}(s-x)^{q-1}\right)ds\right]$$

$$=\frac{1}{1^{q|1}}\left[\left(\frac{n}{r}\right)^q-q\left(\frac{n}{r}-1\right)^q+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{n}{r}-2\right)^q-\ldots\right.$$

$$\left.-\left(\frac{m}{r}\right)^q+q\left(\frac{m}{r}-1\right)^q-\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m}{r}-2\right)^q+\ldots\right]$$

Aus der Gleichung 8 ergibt sich sofort

$$11)\ w=\int_m^n\left[2^q\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{q^{x|-1}}{1^{x|1}}\sum^{x=y+z}\frac{(y+z)^{y+z|-1}}{1^{y|1}1^{z|1}}\frac{(s-[y+z])^{2q-x-1|-1}}{1^{2q-x-1|1}}\right)ds\right]$$

$$=\frac{2^q}{1^{2q|1}}\left[\left(\frac{n}{h}\right)^{2q}-q\left(\left(\frac{n}{h}-1\right)^{2q}+2q\left(\frac{n}{h}-1\right)^{2q-1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\left(\frac{n}{h}-2\right)^{2q}+2.2q\left(\frac{n}{h}-2\right)^{2q-1}+(2q)^{2|-1}\left(\frac{n}{h}-2\right)^{2q-2}\right)\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc}\vdots & \vdots & \vdots\end{array}\right]$$

$$-\frac{2^1}{1^{2q\,|\,1}}\left(\left(\frac{m}{h}\right)^{2q}-q\left(\left(\frac{m}{h}-1\right)^{2q}+2q\left(\frac{m}{h}-1\right)^{2q-1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{q^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}}\left(\left(\frac{m}{h}-2\right)^{2q}+2.\,2q\left(\frac{m}{h}-2\right)^{2q-1}+(2q)^{2\,|\,-1}\left(\frac{m}{h}-2\right)^{2q-2}\right)\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc}\vdots & \vdots & \vdots\end{array}\right)$$

**Aus 9 wird**

$$12)\ w=\int_m^n\left(\left(\sum_{x=0}^{x=q}(-)^x\frac{(2q)^{x\,|\,-1}}{1^{x\,|\,1}}\frac{(s-x)}{1^{2q-1\,|\,1}}\right)ds\right)$$

$$=\frac{1}{1^{2q\,|\,1}}\left(\left(\frac{n}{h}\right)^{2q}-\left(\frac{m}{h}\right)^{2q}-\frac{2q}{1}\left(\left(\frac{n}{h}-1\right)^{2q}-\left(\frac{m}{h}-1\right)^{2q}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{(2q)^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}}\left(\left(\frac{n}{h}-2\right)^{2q}-\left(\frac{m}{h}-2\right)^{2q}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{(2q)^{3\,|\,-1}}{1^{3\,|\,1}}\left(\left(\frac{n}{h}-3\right)^{2q}-\left(\frac{m}{h}-3\right)^{2q}\right)\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\end{array}\right)$$

**Die Ebenen der Planetenbahnen gehen bekanntlich sämmtlich durch den Mittelpunkt der Sonne und sind mehr, oder weniger gegen die Ebene der Erdbahn geneigt. Geht man bei diesen Neigungen von der Ebene der Erdbahn als Basis aus, so betrug die Summe der Neigungen der übrigen zehn Planetenbahnen nach Littrow's theorischer Astronomie Pg. 248 am Anfange des Jahres 1801 81°,93**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Mercur** | **7,02°** | **Ceres** | **10,62°** |
| **Venus** | **3,06°** | **Pallas** | **34,58°** |
| **Mars** | **1,86°** | **Jupiter** | **1,31°** |
| **Vesta** | **7,14°** | **Saturn** | **2,49°** |
| **Juno** | **13,07°** | **Uranus** | **0,78°** |

**Nimmt man nun an, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen der Zufall geherrscht habe, und dafs jede Vertheilung an der Himmelsphäre gleich möglich gewesen wäre, so ist eine unendliche Menge von Richtungen durch den Mittelpunkt der Sonne gedenkbar.**

**Beschränkt man sich hiebei auf den Umstand, dafs die Bewegung der Planeten in ihren Bahnen um die Sonne nach einer und derselben**

Richtung vor sich geht, so war ihre Vertheilung in einen rechten Winkel eingeschlossen, und die eilf Planen konnten unter sich alle mögliche Neigungen von $0^o$ bis $100^o$ einnehmen. Legt man nun jeder möglichen Neigung einer Planetenbahn den ihr zugehörigen Zahlenwerth bei, so kann jede die unendlich vielen Zahlenwerthe von $0^o$ bis $100^o$ durchlaufen. Die Summen aller möglichen Lagen der Planetenbahnen sind dann zwischen den Grenzen $0^o$ bis $1100^o$ eingeschlossen. Nach der obigen Angabe beträgt aber ihre Summe $81{,}93^o$ sechszigtheiliger Eintheilung, oder $91{,}03^o$ hunderttheiliger. Nun kann man unter der Voraussetzung einer gleich möglichen Vertheilung fragen: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Neigungen der eilf Planetenbahnen die Summe von $91{,}03^o$ nicht überschritten haben würden?

Diese Frage beantwortet sich leicht, wenn in der Gleichung 10 $n=91{,}03$, $r=100$, $m=0$ und $q=11$ gesetzt wird. Es entsteht für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$13)\ w = \frac{1}{1^{11|1}} \frac{(91{,}03)^{11}}{100^{11}} = 0{,}00000000890992 \ldots .$$

Hiernach ist 99999999 gegen 1 zu wetten, dafs die Neigungen der Planetenbahnen unter der genannten Voraussetzung die Summe von $91{,}03^o$ nicht überschritten hätten, oder innerhalb der Summengrenze zwischen 0 und $91{,}03^o$ eingeschlossen geblieben wären.

Laplace behandelte diese Aufgabe in seiner Théorie analytique des probabilités 3me Ed. Par. 1820 Pg. 257 und findet die Wahrscheinkeit gröfser, nämlich:

$$\frac{1}{1^{10|1}} (0,\ 914187)^{10} = 0{,}00000011235$$

Er hat nur zehn Planeten in Betrachtung gezogen, was natürlich zu einem andern Resultat führen mufste. Eine nach den Vega'schen Logarithmentafeln ausgeführte Rechnung gab mir den Werth der Wahrscheinlichkeit 0,0000001123786 . . . also in der fünften Zahl von dem von Laplace mitgetheilten verschieden.

In der oben angegebenen Wahrscheinlichkeit ist möglich, dafs die Neigungen der einzelnen Planetenbahnen sich mehr, als die der Pallas von der Erdbahn entfernt und die Grenze 34°,58 überschritten hätten. Sie hätten sich auf 60°, 70° und darüber entfernen können, wenn nur der Inbegriff aller Summen die Grenze 81,93° nicht überschritten worden wäre.

Geht man daher auf einen andern Gesichtspunkt über und fragt: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Bahnen sämmtlicher Planeten eine Dimension von 10° nicht überschritten hätten, also sämmtlich in eine Grenze von zehn Graden eingeschlossen geblieben wären, unter der Voraussetzung, dafs alle Lagen unter ihren Bahnen gleich möglich waren, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, wenn die Anzahl der Fälle, worin die eilf Planetenbahnen in einer Ausdehnung von 10° eingeschlossen bleiben, durch die Zahl aller möglichen Fälle gemessen wird. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$14)\ w = \frac{10^{11}}{100^{11}} = \frac{1}{100000000000}$$

und es ist hiernach 99999999999 gegen 1 zu wetten, dafs diefs nicht eingetreten wäre, wenn alle Neigungen der Planetenbahnen gleich möglich gewesen wären.

Die Betrachtung der bisherigen Fälle ging von der Voraussetzung aus, dafs die Bewegung sämmtlicher Planeten nur nach einer Richtung im Himmelsraume hin möglich war. Nimmt man aber an, dafs die Bewegung der Planeten in ihrer Bahn auch im entgegen gesetzten Sinne möglich war, so dehnen sich die Grenzen, zwischen welchen die Lagen der Planetenbahnen im Himmelsraume fallen konnten, von 0° bis 200° aus. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs die Summe der Neigungen der eilf Planetenbahnen die Grenze 91,03° nicht überschritten haben würden, wenn alle Lagen und die Richtungen im entgegen gesetzten Sinne gleich möglich gewesen wären, während sie doch in ihrer Bewegung nur einerlei Richtung befolgen.

$$15)\ w = \frac{(91{,}03)^{11}}{1^{11|1}\,.\,(200)^{11}} = 0{,}000000000000435054 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

**und es läfst sich 99999999999 gegen 1 wetten, dafs die Neigungen der Planetenbahnen nicht in die bezeichnete Summengrenze eingeschlossen geblieben wären. Geht man von der nämlichen Voraussetzung aus und fragt: Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Neigungen der Planetenbahnen auf eine Zone von 10° eingeschränkt geblieben wären, so ergibt sich**

$$16)\ w = \frac{10^{11}}{(200)^{11}} = 0{,}000000000000004882812 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

**Diese Resultate machen den Schlufs sehr wahrscheinlich, dafs bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen und in ihre Richtung auf denselben der Zufall keineswegs vorgeherrscht habe. Diese Ansicht gewinnt noch mehr Bestand, wenn wir die Neignngen der vier Asteroiden wegen ihrer gröfsern Divergenz aus dem Calcul ausschliefsen. Die Zahl der Elemente wird zwar geringer und damit sollte nothwendig ein Steigen der Wahrscheinlichkeit verbunden seyn. Dennoch aber zeigt sich der Gleichung 13 gegenüber ein Fallen der Wahrscheinlichkeit, welche für das Eintreffen des Ereignisses spricht und dadurch das zufällige Eingreifen einer Ursache stärker verneint. Der Werth der Wahrscheinlichkeit ist bei einer Summe von 18,35° für die Neigungen von 7 Planeten**

$$17)\ w = \frac{(18,\,35)^{7}}{1^{7|1}(100)^{7}} = 0{,}0000000001390027 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

**Wir gehen nun von folgender Voraussetzung aus: Eine Ursache habe bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen so gewirkt, dafs sie dieselben von der Lage einer bestimmten Ebene weggetrieben habe, und zwar in steigender arithmetischer Progression, also um so stärker wirkend, je weiter die Lagen der Ebenen von der ursprünglichen sich entfernt hätten. Die Grenze der Wirkung sey die Gröfse eines rechten Winkels. Soll unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs die bestehende Anordung satt gefunden haben würde, so ist die Gleichung 11 zu benützen, und $n = 91{,}03°$, $q = 1$, $m = 0$ zu setzen. Wir erhalten**

$$18)\ w = \frac{2^{11}}{1^{22}|^{1}} \frac{(91{,}03)^{22}}{(100)^{22}} = \frac{0{,}2306796}{10^{18}} \ldots\ldots$$

**Der Werth dieser Wahrscheinlichkeit ist so klein, dafs die Annahme, als sey die bestehende Anordnung aus dieser Voraussetzung hervorgegangen, an die Unmöglichkeit grenzt, und dafs sich die Annahme, als habe das Gegentheil hievon statt gehabt, zu solcher Gewifsheit steigert, dafs sie jede historische Wahrheit, die wir kaum zu beanstanden wagen, an Sicherheit unendlich überragt. Würden wir die Möglichkeit der doppelsinnigen Richtung auf den Bahnen in den Calcul aufnehmen, so würde sich die gefundene Wahrscheinlichkeit um das $2^{11}=2048$fache verkleinern, und dadurch die Richtigkeit der Annahme des Gegentheils um so mehr steigern.**

## §. 13.

**Mittelst der bisher aufgefundenen Gleichungen lassen sich auch Anwendungen auf Sicherheit gemachter Beobachtungen, Möglichkeit und Gröfse der dabei vorkommenden Fehler machen.**

**Der Zweck jeder Beobachtung ist ein fehlerfreies Resultat zu erhalten, oder wenn diefs nicht möglich ist, der Wahrheit so nahe, als möglich zu kommen, und jeden dabei möglichen Fehler nach Kräften zu vermeiden. Da aber diefs keine leichte Sache ist, die Fehler sich bei aller Sorgfalt und Mühe dennoch einschleichen, aller Aufmerksamkeit und Geduld spotten, und man daher nie ganz verlässigt seyn kann, ein vollkommen richtiges und genaues Resultat aufgefunden zu haben, so wird es unter diesen Verhältnissen erwünscht seyn, ein Mittel kennen zu lernen, wodurch man im Stande ist, wenigstens die Grenzen anzugeben, innerhalb welcher der zu befürchtende Fehler unter bestimmten Bedingungen eingeschlossen seyn wird. In diesem Falle werden uns die bisher gefundenen Gleichungen gute Dienste leisten.**

**Man kann wohl mit Recht annehmen, dafs sich die Geschicklichkeit eines Beobachters mit der Uebung und öftern Wiederholung**

steigern, dafs mit der gröfsern Geschicklichkeit auch die Möglichkeit zu irren sich mindern und die Gewandtheit vermehren werde, Fehler zu vermeiden. Nimmt man nun an, dafs jemand seine Aufmerksamkeit der Beobachtung eines Ereignisses, oder irgend einer Messung und dergl. zuwende, wobei es sich um die Ermittlung des richtigen Resultates handelt, so können Fehler von verschiedener Bedeutung vorkommen. Ein Fehler wird um so gröfser seyn, je weiter er von dem richtigen Resultate entfernt ist, er wird um so kleiner seyn, je näher er demselben liegt, er wird 0 seyn, wenn die Beobachtung mit dem richtigen Resultat zusammenfällt. Die Beobachtung wird schlecht seyn, wenn sie ein Resultat trifft, das weit von dem richtigen Resultate liegt, und um so schlechter, je weiter es von demselben absteht. Setzen wir nun weiter voraus, die Geschicklichkeit des Beobachters stehe mit der Möglichkeit, das richtige Resultat zu treffen, in einfachem arithmetischen Verhältnisse, und die Wahrscheinlichkeit, ein besseres Resultat zu erhalten sey gröfser, als die, ein weniger gutes zu erhalten, die Wahrscheinlichkeit das richtige Resultat zu treffen, sey am gröfsten, diejenige sich bis zur äussersten Fehlergrenze zu verirren am kleinsten, wie diefs mit den Bemühungen eines gewandten und sorgfältigen Beobachters im Einklang steht, so entsteht die Frage: Wie grofs ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dafs der eine solche Beobachtung begleitende Fehler sich nicht über die Grenze + n und — n ausdehnen werde, wenn die bei derselben mögliche Fehler-Grenze durch + h und — h bezeichnet wird?

Die Frage geht von der Bedingung aus, dafs der vorkommende Fehler positiv, oder negativ seyn oder im entgegengesetzten Sinne bei der Beobachtung statt finden könne, und findet ihre Beantwortung mit einigen Modifikationen durch die Gleichung 12 §. 12, Pg. 69. Diese Gleichung stellt den Inbegriff der Wahrscheinlichkeiten für die Summen dar, welche zwischen den Grenzen m und n liegen. Alle Summen, die möglich sind, liegen zwischen der Grenze 0 und 2qh. Die Grenzen für die Werthe, woraus die Summen erzeugt werden

können, liegen zwischen 0 und 2h. Der Werth der mittleren Summe ist für die dort gegebene Form qh. In unserm Falle sind die Grenzen der Werthe, welche die Summen erzeugen, — h und + h, die Grenzen der Summen — qh und + qh, der Werth der mittleren Summe 0, die Grenzen, innerhalb welcher die Fehler eingeschlossen bleiben sollen, — n und + n. Hiernach sind die Werthe der erzeugenden Elemente in der dortigen Gleichung um h zu erniedrigen, für das Mittelglied qh, für die Fehlergrenzen qh — n und qh + n zu setzen, und diese für m und n in der dortigen Gleichung einzuführen. Es ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1)\ w = \frac{1}{1^{2q|1}}\left[\left(\frac{qh+n}{h}\right)^{2q} - \left(\frac{qh-n}{h}\right)^{2q} - \frac{2q}{1}\left(\left(\frac{qh+n}{h}-1\right)^{2q} - \left(\frac{qh-n}{h}-1\right)^{2q}\right)\right.$$
$$+ \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\left(\frac{qh+n}{h}-2\right)^{2q} - \left(\frac{qh-n}{h}-2\right)^{2q}\right)$$
$$- \frac{(2q)^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\left(\frac{qh+n}{h}-3\right)^{2q} - \left(\frac{qh-n}{h}-3\right)^{2q}\right)$$
$$\left.\vdots \qquad\qquad \vdots\right]$$

q zeigt in dieser Gleichung die Zahl der Beobachtungen an, h die äusserste Fehlergrenze, welche bei einem Beobachter möglich ist. Der Werth von qh + n und qh — n mufs nach den besondern Bedingungen der Aufgabe vorerst ermittelt werden.

Wir benützen diese Gleichung zur nähern Untersuchung einiger besondern Fälle.

Jemand beobachtet mit einem Mefsinstrumente. Die äusserste Fehlergrenze, bis zu welcher er irren kann, gehe bis zu zehn Stufen rechts oder links vom richtigen Resultate. Die Geschicklichkeit des Beobachters ist so, dafs er nach der Aufgabe den gröfsten positiven oder negativen Fehler nur einmal unter 100 Fällen begehen, die weniger bedeutenden öfter, und endlich das richtige Resultat am häufigsten zu erhalten suchen, und auch wirklich treffen wird. Er macht 1, 2, 3, 4, 5 Beobachtungen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sich der begangene Fehler nicht über 4 Stufen vom

richtigen Resultate entfernen, und also innerhalb dieser Grenzen eingeschlossen seyn wird?

Wird eine Beobachtung gemacht, so ist $q=1$ und $qh+n=14$, $qh-n=6$ zu setzen und der Werth der Wahrscheinlichkeit ist

$$w=\frac{1}{2}\,[1{,}4^2-0{,}6^2-2\,.\,0{,}4^2]=0{,}64$$

Unter 10 Fällen kann man bei einmaliger Beobachtung nahezu siebenmal ein Resultat erhalten, wobei kein gröfserer Fehler, als der oben bezeichnete vorkömmt.

Werden zwei Beobachtungen gemacht, so ist $q=2$, $qh+n=28$, $qh-n=12$ in 1 zu setzen, und es entsteht

$$w=\frac{1}{1^{4|1}}\left(2{,}8^4-1{,}2^4-4[1{,}8^4-0{,}2^4]+\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\,0{,}8^4\right)=\frac{198656}{240000}=0{,}827733\ldots$$

Werden drei Beobachtungen gemacht, so ist $qh+n=42$ und $qh-n=18$ und $q=3$ zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit wird seyn

$$w=\frac{1}{1^{6|1}}\left(4{,}2^6-1{,}8^6-6(3{,}2^6-0{,}8^6)+15\,.\,2{,}2^6\ldots\right)=\frac{65512128}{72000000}=0{,}90989066\ldots.$$

Werden vier Beobachtungen gemacht, so ist $qh+n=56$, $qh-n=24$ und $q=4$ zu setzen. Es ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w=\frac{1}{1^{8|1}}\left(5{,}6^8-2{,}4^8-8(4{,}6^8-1{,}4^8)\ldots\right)=\frac{3835458326528}{4032000000000}=0{,}95125456301\ldots.$$

Werden fünf Beobachtungen gemacht, so ist $qh+n=70$, $qh-n=30$ und $q=5$ zu setzen. Die fragliche Wahrscheinlichkeit wird

$$w=\frac{1}{1^{10|1}}\left(7^{10}-3^{10}-10(6^{10}-2^{10})+45(5^{10}-1)\ldots\right)=\frac{3531092}{3628800}=0{,}973074\ldots.$$

Man erkennt hieraus, dafs die Wahrscheinlichkeit ein richtiges Resultat zu erhalten, sich mit der Zahl der Beobachtungen steigert, und man kann 99 gegen 2 wetten, dafs bei fünf sorgfältigen Beobachtungen der Fehler 4 Stufen nicht übersteigen werde, wenn die äusserste Fehlergrenze bis auf 10 Stufen sich erheben kann. Diese Fehlergrenze ist ziemlich grofs. Nimmt man die äusserste Fehlergrenze halb so klein, so wird sich auch die Grenze für den zu befürchtenden Fehler auf die Hälfte zurückführen, und man kann dann

mit denselben Graden der Wahrscheinlichkeit erwarten, dafs der Fehler, den das Resultat in sich trägt, sich höchstens bis zu zwei Stufen erheben, oder überhaupt $\frac{2}{5}$ der äufsersten Fehlergrenze nicht übersteigen werde.

Diese Schlüsse finden allenthalben bei Messungen ihre Anwendungen. Beobachtet jemand unter diesen Voraussetzungen mit einem Repetitionskreise oder einem Theodoliten und erstreckt sich die äusserste Fehlergrenze bis auf fünf Theile des niedersten Maafses, so ergeben sich die obigen Wahrscheinlichkeiten, dafs nach mehrmaligen Messungen der Fehler die genannten Grenzen nicht überschreiten werde, und es folgert sich leicht hieraus, dafs bei Messungen, die nicht eine besondere Genauigkeit erfordern, eine viermalige Wiederholung genügt, wie denn diese Zahl auch in gewöhnlichen Fällen nicht überschritten wird.

Vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten, welche den verschiedenen Anzahlen der Beobachtungen zugehören, so erkennt man leicht, dafs sie im Wachsen begriffen sind. Sie werden sich bei fernern Wiederholungen noch weiter steigern lassen, und der Schlufs ergibt sich leicht, dafs durch beliebig fortgesetzte Wiederholung der Messungen die Sicherheit des Resultates immer mehr befestigt wird.

Die Wahrscheinlichkeiten, dafs eine gegebene Fehlergrenze nicht werde überschritten werden, wachsen nämlich mit der Anzahl der angestellten Beobachtungen, und werden um so gröfser, je gröfser die Zahl der Wiederholungsfälle ist, wenn auch die angenommene Fehlergrenze ganz enge angenommen seyn sollte. Hiedurch zeigt sich, warum durch Messungen, die 20 oder 30 mal wiederholt werden, die Sicherheit des Resultates so hoch gesteigert, und ausser allem Zweifel gestellt werden kann, und warum insbesondere, die so häufig und sorgfältig wiederholten Beobachtungen der Astronomie so grofses Zutrauen verdienen.

Bisher wurde der Werth der Wahrscheinlichkeiten miteinander verglichen, während die Wiederholungsfälle sich steigerten, die

Fehlergrenze aber unverändert und in ein bestimmtes Verhältnifs zu der Zahl aller möglichen Fälle eingeschlossen blieb. Nun können auch diese Werthe untereinander verglichen werden, wenn die Wiederholungsfälle sich steigern, und die Fehlergrenze enger gezogen wird.

Oben Pg. 76 hat sich die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler die 4te Stufe bei einer Beobachtung nicht überschreiten werde, auf 0,64 bestimmt. Ziehen wir die Fehlergrenze um ½ Stufe enger, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der zu begehende Fehler bei zwei Beobachtungen die Stufe 3,5 nicht überschreiten werde.

$$w = \frac{1}{1^{4|1}}\left(2{,}7^4 - 1{,}3^4 - 4(1{,}7^4 - 0{,}3^4) + 6 \,.\, 0{,}7^4\right) = 0{,}764691 \ldots$$

Werden drei Beobachtungen gemacht, und wird die Fehlergrenze wieder enger und auf 3⅓ Stufe gezogen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs der zu begehende Fehler diese Stufe nicht überschreiten werde.

$$w = \frac{1}{1^{6|1}}\left(4^6 - 2^6 - 6(3^6 - 1^6) + 15 \,.\, 2^6 - 20 \,.\, 1^6\right) = 0{,}838888 \ldots$$

Bei vier Beobachtungen und der Fehlergrenze 3,25 ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der zu begehende Fehler diese Grenze nicht überschreiten werde.

$$w = \frac{1}{1^{8|1}}\left(5{,}3^8 - 2{,}7^8 - 8(4{,}3^8 - 1{,}7^8) + \ldots\right) = 0{,}887507494 \ldots$$

Bei fünf Beobachtungen und der Fehlergrenze 3 ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der zu begehende Fehler diese Grenze nicht überschreiten werde.

$$w = \frac{1}{1^{10|1}}\left(6{,}5^{10} - 3{,}5^{10} - 10(5{,}5^{10} - 2{,}5^{10}) + \ldots\right) = 0{,}8990949 \ldots$$

Diese Bemerkungen kann man noch weiter fortsetzen, und auch auf andere hierhergehörige Fälle ausdehnen. Sie weisen auf folgenden nicht unwichtigen Satz.

Wird unter der Voraussetzung, dafs mit der Uebung die Geschicklichkeit des Beobachters, nach den oben genannten Bedingungen das richtige Resultat zu treffen, wächst, die Zahl der Beobachtungen

gesteigert, so wird nicht nur die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Resultates erhöht, sondern es läfst sich zugleich die Fehlergrenze in engere Schranken ziehen, ohne dafs das Wachsen der Wahrscheinlichkeit, welche das Einschliefsen eines Fehlers in die engere Grenze bestimmt, gefährdet wird.

Das Einschränken der Fehlergrenzen wird bei gröfserer Zahl der Beobachtungen langsamer vorschreiten, als bei kleinerer Zahl.

Endlich ergibt sich mittelst der Gleichung 12 §. 12, Pg. 69 die Möglichkeit, Fehler, welche innerhalb bestimmter Grenzen liegen, miteinander zu vergleichen.

Die Voraussetzungen, einen Fehler bei dem Beobachten zu begehen, seyen dieselben, wie bisher. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler gemacht werde, der zwischen der äussersten Fehlergrenze und der ersten Stufe des kleinsten Maafses auf einer bestimmten Seite des richtigen Resultates liege, wenn fünf Beobachtungen gemacht werden?

Die Wahrscheinlichkeit bestimmt sich, wenn $m=0$, $n=5$, $h=10$ gesetzt wird. Sie ist

$$w_1 = \frac{1}{1^{10|1}}\, 0{,}5^{10} = \frac{9765625}{362880000000000} = 0{,}0000000002691144\ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs unter diesen Voraussetzungen der Fehler zwischen der äussersten Fehlergrenze und der zweiten Stufe liegen werde, ist

$$w_2 = \frac{1}{1^{10|1}} = \frac{1}{3628800} = 0{,}0000002755732\ldots.$$

Setzt man diese Schlüsse fort, so ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, dafs die begangenen Fehler zwischen der äussersten Fehlergrenze und der dritten Stufe, zwischen der äussersten Fehlergrenze und der vierten Stufe liegen werden u. s. w. Werden diese Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach durch $w_3$, $w_4$, $w_5$, . . . $w_9$, $w_{10}$ bezeichnet, so gewinnen wir folgende Zusammenstellung

$$w_3 = \frac{1}{1^{10|1}}\,[1{,}5^{10} - 10\,.\,0{,}5^{10}] = 0{,}00001588824\ldots$$

$$w_4 = \frac{1}{1^{10|1}}\,[2^{10} - 10\,.\,1^{10}] = 0{,}0002794312\ldots$$

$$w_5 = \frac{1}{1^{10|1}}\,[2{,}5^{10} - 10\,.\,1{,}5^{10} + 45\,.\,0{,}5^{10}] = 0{,}002469173\ldots$$

$$w_6 = \frac{1}{1^{10|1}}\,[3^{10} - 10\,.\,2^{10} + 45.1^{10}] = 0{,}01346295\ldots$$

$w_7 = 0{,}05045251\ldots$
$w_8 = 0{,}1388769\ldots$
$w_9 = 0{,}29452\ldots$
$w_{10} = 0{,}5$

Man sieht, dafs diese Wahrscheinlichkeiten wachsen, je gröfser die Zahl der Stufen wird, zwischen welche die Fehler fallen können. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler zwischen einer der äussersten Fehlergrenze und dem richtigen Resultate liegen werde, wird 0,5 seyn, wie diefs aus der Natur der Sache hervorgeht.

Benützt man nun die Gleichung 12 §. 12, Pg. 69 in dem angegebenen Sinne weiter, so leiten sich nun auch leicht die Wahrscheinlichkeiten ab, dafs der Fehler gerade zwischen der äussersten Fehlergrenze und der ersten Stufe, zwischen der ersten Stufe und zweiten, zwischen der zweiten und dritten u. s. f. liegen werde. Sie sind, wenn sie der Reihe nach durch $w_1$, $w_2$, $w_3$ $w_4$ . . . $w_9$, $w_{10}$ bezeichnet werden

$w_1 = 0{,}0000000002697348\ldots$
$w_2 = 0{,}000000275304\ldots$
$w_3 = 0{,}0000156127\ldots$
$w_4 = 0{,}000263543\ldots$
$w_5 = 0{,}00218974\ldots$
$w_6 = 0{,}0109937\ldots$
$w_7 = 0{,}0369895\ldots$
$w_8 = 0{,}088424\ldots$
$w_9 = 0{,}15565\ldots$
$w_{10} = 0{,}30547\ldots$

Vergleicht man die hier gefundenen Resultate, so zeigt sich, dafs unter den oben aufgestellten Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zu machen, um so gröfser wird, je näher er dem

richtigen Resultate liegt, oder je kleiner, und unwichtiger er ist, dafs dagegen die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Fehler zu begehen, um so kleiner wird, je weiter er von dem richtigen Resultat absteht, oder je gröfser und bedeutender er wird.

Da die vorstehenden Schlüsse, auf jeden andern hierher gehörigen Fall angewendet, ähnliche Resultate hervorrufen, so ergibt sich leicht, dafs der eben ausgesprochene Satz allgemein gilt.

## §. 14.

Die Gleichung 12 §. 12, Pg. 69 läfst auch noch eine Anwendung auf die Güte und Sicherheit eines durch Beobachtung gewonnenen Resultates und auf die Bedeutung des dabei zu fürchtenden Fehlers zu.

Sie läfst sich nämlich als ein Flächenraum betrachten, der von einem Theil der Abscissenaxe, von zwei Ordinaten und einer Curve eingeschlossen ist, deren Länge durch die Endpunkte der zwischen liegenden Ordinaten bestimmt wird. Die Länge der Abscissenaxe ist 2qh, die Abscissen können alle Werthe von 0 bis 2qh durchlaufen. Für jeden Werth ist eine Ordinate möglich. Sie ergibt sich, wenn die Gleichung 9 §. 12 benützt wird. Die Curve durchschneidet die Abscissen-Axe in zwei Punkten, wie sich durch Einführung der Werthe 0 und 2qh ergibt.

Die Gleichung 12 §. 12 gibt hiernach den Flächenraum zwischen den Ordinaten n und m, dem Stücke n — m und der Curve in Beziehung auf die Einheit an. Um ein anderes Maafs für diese Fläche als die Einheit zu erhalten, ist nur nöthig die genannte Gleichung durch $h^{2q}$ zu vervielfachen. Es entsteht

$$1)\ F_1 = \frac{1}{1^{2q|1}}\left(n^{2q} - m^{2q} - 2q\left((n-h)^{2q} - (m-h)^{2q}\right)\right.$$
$$+ \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left((n-2h)^{2q} - (m-2h)^{2q}\right)$$
$$\left.\vdots \quad \vdots \quad \vdots\right)$$

Der von der Curve und der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenraum ist sofort

$$2)\ F_2 = \frac{1}{1^{2q|1}}\left((2qh)^{2q} - 2q\,([2q-1]h)^{2q} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,([2q-1]h)^{2q} - \ldots\right)$$

**Die Ordinaten, welche für die Abscissen 0 bis 2qh möglich sind, fallen ihrer Bedeutung nach mit den Möglichkeiten zusammen ein bestimmtes Resultat zu erhalten, darunter ist nur eine, die Mittelordinate, welche ein fehlerfreies Resultat andeutet. Ihre Gröfse wird aus der Gleichung 9 §. 12, oder durch Differenziren der Gleichung 1 hinsichtlich n und durch Einführen des Werthes qh erhalten. Sie ist**

$$y = \frac{1}{1^{2q-1|1}}\left((qh)^{2q-1} - 2q\,([q-1]h)^{2q-1} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,([q-2]h)^{2q-1} - \ldots\right)$$

$$3)\ y = \frac{2q}{1^{2q|1}}\left((qh)^{2q-1} - 2q\,([q-1]h)^{2q-1} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,([q-2]h)^{2q-1} - \ldots\right)$$

**Wäre bei der Beobachtung kein Fehler möglich, so müfste jede Ordinate mit der Mittelordinate gleiche Gröfse haben. In jeder Richtung müfste das wahre Resultat gefunden werden und die Fläche würde für diesen Fall ein Rechteck bilden, dessen Flächenraum durch das Product der Mittelordinate und der Abscissenaxe (2qh) bestimmt und durch folgende Gleichung dargestellt wird**

$$4)\ F_3 = \frac{2q\,.\,2qh}{1^{2q|1}}\left((qh)^{2q-1} - 2q\,([q-1]h)^{2q-1} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,([q-2]h)^{2q-1} - \ldots\right)$$

**Der hier angegebene Flächenraum schliefst die Fläche des richtigen Resultates und die der Fehler ein. Die Fläche, welche die Fehler in sich begreift, liegt zwischen der Tangente der Mittelordinate und der Curve.**

**Die Fläche des Rechteckes, welches zwischen dem Abscissenstücke n — m und den zugehörigen Ordinaten n und m liegt, wenn letztere bis zur Tangente verlängert werden, ergibt sich durch Vervielfachen der Gleichung 3 mit n — m und es ist**

$$5)\ F_4 = \frac{2q(n-m)}{1^{2q|1}}\left((qh)^{2q-1} - 2q\,([q-1]h)^{2q-1} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,([q-2]h)^{2q-1}\ \ldots\right)$$

**In diesem Flächenraum ist derjenige des richtigen Resultates und des damit verbundenen Fehlers begriffen.**

**Bei den bisher gefundenen Darstellungen liegt der Abscissenursprung an dem einen Endpunkte der Axe. Legt man ihn in den**

Mittelpunkt der Axe, wie bei der Gleichung 1 §. 13, Pg. 75 geschah, und führt Ordinaten ein, die gleichweit vom Mittelpunkte auf beiden Seiten abstehen, so ist qh+n statt n und qh − n statt m zu setzen. Für diesen Fall geht die Gleichung 1 in folgende über

$$6)\ F_1 = \frac{1}{1^{2q|1}}\Big((qh+n)^{2q} - (qh-n)^{2q} - 2q\left(([q-1]h+n)^{2q} - ([q-1]h-n)^{2q}\right) + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(([q-2]h+n)^{2q} - ([q-2]h-n)^{2q}\right) \vdots \quad \vdots \Big)$$

Die Gleichung 5 in folgende

$$7)\ F_4 = \frac{4qn}{1^{2q|1}}\left((qh)^{2q-1} - 2q\,([q-1]h)^{2q-1} + \frac{(2q)^{2|-1}}{1^{2|1}}([q-2]h)^{2q-1} - \ldots\right)$$

Der Werth von n mufs, wie oben, nach den besondern Bedingungen der Aufgabe ermittelt werden.

Diese Gleichungen setzen uns in Stand die Stärke eines unter gegebenen Voraussetzungen begangenen Fehlers zu bestimmen. Seine Stärke oder Bedeutung wird nämlich durch das Verhältnifs der Fläche, welche die Gröfse des begangenen Fehlers zu der ganzen Fehlerfläche ausdrückt, dargestellt werden können, und es ist

$$8)\ E = \frac{F_4 - F_1}{F_3 - F_2}$$

Benützen wir diese Gleichung zu Ermittlung der Fehlerstärke für eine und dieselbe Zahl der Beobachtungen und bei verschiedenen Fehlergrenzen, so ergibt sich für den Fall als zwei Beobachtungen gemacht werden, und 4 Stufen als Fehlergrenze angenommen werden

$$E_0 = \frac{2.2.16(20^3-4.10^3) - 28^4 + 12^4 + 4(18^4-2^4) - 6.8^4}{4.40(20^3-4.10^3) - 40^4 + 4.30^4-6.20^4 + 4.10^4} = \frac{57344}{400000} = 0{,}14336$$

Werden bei derselben Anzahl der Beobachtungen die Fehlergrenzen auf $3\frac{1}{2}$, 3, 2 Stufen gesetzt, so ist der Reihe nach

$$E_1 = 0{,}101185,\quad E_2 = 0{,}06696,\quad E_3 = 0{,}02176$$

Die Wahrscheinlichkeiten, welche für das Eintreffen dieser Fälle sprechen, sind

$w_0 = 0{,}827733\ldots$ $w_1 = 0{,}764691\ldots$ $w_2 = 0{,}6884\ldots$ $w_3 = 0{,}497066\ldots$

**Werden drei Beobachtungen gemacht und wird die Bedeutung der Fehler für die Stufen 4, 3⅓, 3, 2 bestimmt, so ergibt sich aus 8**

$E_1 = 0{,}184347\ldots$, $E_2 = 0{,}1158\ldots$ $E_3 = 0{,}0863969\ldots$, $E_4 = 0{,}0284864\ldots$

**Die Wahrscheinlichkeiten, gerade diese Resultate zu erhalten, sind**

$w_1 = 0{,}90989066\ldots$ $w_2 = 0{,}8388\ldots$ $w_3 = 0{,}7912867\ldots$, $w_4 = 0{,}59548$

**Werden vier Beobachtungen gemacht, so ergibt sich die Bedeutung der Fehler für die Stufen 3¼ und 3**

$E_1 = 0{,}126592\ldots$ $E_2 = 0{,}1038427\ldots$

**und die Wahrscheinlichkeiten, welche für das Eintreffen dieser Fälle sprechen, sind**

$w_1 = 0{,}887705907\ldots$ $w_2 = 0{,}85609\ldots$

**Diese Zusammenstellung läfst sich weiter fortsetzen. Sie führt zu folgendem Satze:**

**Die Bedeutung eines Fehlers wird bei einer und derselben Zahl von Beobachtungen um so geringer, in je engere Grenzen der Fehler eingeschlossen wird. Die Wahrscheinlichkeit aber, den Fehler in engere Grenzen einzuschliefsen, wird ebenfalls geringer.**

**Vergleichen wir aber bei wachsender Zahl der Beobachtungen und Verengerung der Fehlergrenze die Bedeutung der Fehler und die Wahrscheinlichkeiten diese zu erhalten, so ergibt sich für zwei, drei und vier Wiederholungen bei den bezüglichen Fehlergrenzen 4, 3⅓ und 3 die Bedeutung der dabei begangenen Fehler**

$E_1 = 0{,}14336$, $E_2 = 0{,}1158\ldots$, $E_3 = 0{,}103842\ldots$

**Die Wahrscheinlichkeiten diese Resultate zu erhalten sind**

$w_1 = 0{,}82773\ldots$ $w_2 = 0{,}8388\ldots$ $w_3 = 0{,}85609\ldots$

**Es zeigt sich, dafs die Bedeutung der begangenen Fehler geringer wird, während die Wahrscheinlichkeiten, diese Fehler zu erhalten, steigen. Diese Vergleichung läfst sich noch weiter fortsetzen. Sie weist auf folgenden Satz:**

**Wird die Zahl der Beobachtungen gesteigert, so nimmt die Bedeutung der dabei möglichen Fehler ab. Dabei schliefst sich die Fehlergrenze immer enger, und die Wahrscheinlichkeit ein fehlerfreieres Resultat zu erhalten, nimmt zu gleicher Zeit zu.**

Wiederholte Beobachtungen führen daher zu immer fehlerfreieren Resultaten.

Aus der Gleichung 8 lassen sich noch weitere Folgerungen über Fehlergrenzen ziehen. Wir verfolgen sie aber nicht weiter.

Verstehen wir unter der Güte eines durch Beobachtung gewonnenen Resultates das Verhältnifs, welches zwischen der Fläche, die von der oben angedeuteten Curve, zwei Ordinaten und dem zwischen ihnen liegenden Axen-Abschnitt eingeschlossen wird, und derjenigen statt findet, die von den verlängerten Ordinaten, der Tangente und demselben Abscissenstücke (also derjenigen Fläche, die entsteht, wenn kein Fehler möglich wäre) eingeschlossen wird, so erhalten wir zu ihrer Bestimmung

$$9)\quad G = \frac{F_1}{F_4}$$

Die Bedeutung des Gegentheils ist

$$10)\quad U = \frac{F_4 - F_1}{F_4}$$

Benützen wir auch diese Gleichungen, so lassen sich ähnliche Resultate, wie oben, gewinnen und darunter folgendes:

Bei einer und derselben Zahl der Beobachtungen ist die Güte des Resultates um so gröfser, je enger die Fehlergrenze gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit aber, die engere Fehlergrenze zu erhalten, wird dann kleiner, und man hat gröfsere Hoffnung, ein Resultat bei gröfserer Fehlergrenze, also ein weniger gutes zu erhalten, als ein fehlerfreieres.

Wir kehren endlich zu dem in §. 12 gegebenem Beispiele zurück. Dort wurde gezeigt, dafs die bestehende Anordnung der Planetenbahnen ganz unwahrscheinlich erscheinen würde, wenn jede beliebige Neigung der einzelnen Bahnen an der Himmelsphäre gleich möglich gewesen wäre, oder wenn eine Ursache bei der Einführung der Planeten in ihre Bahnen in irgend einer Richtung ablenkend gewirkt hätte. Wir wollen nun die bestehende Anordnung in der Neigung der Planetenbahnen unter der Voraussetzung betrachten, dafs eine Ursache bei Einführung der Planeten auf ihre Bahnen in einer be-

stimmten Richtung am stärksten und auf beiden Seiten von derselben in gleichem Maafse abnehmend so gewirkt habe, dafs in einer Entfernung von $10^0$ ihre Grenze zu setzen sey. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter dieser Annahme die Neigungen von 10 Planetenbahnen in die Grenze von $5^0$ auf beiden Seiten der bezeichneten Richtung eingeschlossen worden wäre, oder dafs die Breite des Thierkreises nicht $10^0$ überschritten hätte?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn $n = 150^0$, $m = 50^0$, $q = 10$, $h = 10^0$ in 12 §. 12, Pg. 69 gesetzt wird. Sie ist

$$w = \frac{1}{1^{20|1}}\left(15^{20} - 5^{20} - 20\,(14^{20} - 4^{20}) + \frac{20^{2|-1}}{1^{2|1}}\,(13^{20} - 3^{20})\ldots\right) = 0{,}999949\ldots$$

Die Zahl 10 ist der kürzern Rechnung wegen gewählt. Es ist klar, dafs nach der Bemerkung des §. 12 die Wahrscheinlichkeit noch gröfsern Werth erhalten würde, wenn 11 Planetenbahnen in den Calcul aufgenommen würden. Das Eintreffen des durch sie angezeigten Resultates ist aber sehr wahrscheinlich, denn der vorstehende Werth liegt der Einheit ziemlich nahe.

Vergleichen wir aber mit diesen Folgerungen die Neigungen der Planetenbahnen, so ergibt sich eine ziemliche Differenz, denn die Bahnen des Merkurs, der Vesta, Ceres, Juno und Pallas übersteigen diese Grenze und besonders letztere bedeutend. Diese Bemerkung nöthigt, obige Annahme von einer einwirkenden Ursache bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen entweder gänzlich, oder sie wenigstens in der angegebenen Form zu verlassen, und dann, wegen der bedeutenden Divergenz in den Bahnen der eben genannten Planeten, verschieden wirkende Ursachen anzunehmen oder verschiedene Perioden bei Einführung der Planeten in ihre Bahnen anzunehmen. Gegen diese letztere Annahme dürfte vielleicht die grofse Harmonie, die in den Bahnen der Planeten und ihren Trabanten herrscht, und dann auch der Umstand sprechen, dafs die Naturgesetze immer auf die einfachste Weise wirken, ihre Thätigkeit mag die Erzeugung der Welten, oder der Atome bezwecken. Die Annahme einer in bestimmter Richtung wirkenden Ursache ist daher auch bei Einführung

der Planeten in ihre Bahnen die einfachste Annahme. Diese Ursache kann aber in ihrer Wirkung durch zufällig eingreifende Umstände gestört worden seyn, etwa durch eine excentrische Lage des Schwerpunktes eines Planeten, welche eine Ablenkung von der ursprünglichen Richtung zur Folge haben mufste, oder durch ein Zerplatzen der Masse eines Planeten im Augenblicke der Einführung. Auf diese Weise dürften sich die Divergenzen in der Bahn des Merkurs und dann die der vier kleinern Planeten Vesta, Ceres, Juno und Pallas leicht erklären lassen. Hiemit stimmt auch die zerstreute Lage der Bahnen dieser Planeten, während die der sieben übrigen Planeten offenbar mit der oben angedeuteten Annahme übereinstimmt und einer sehr engen Zone angehört.

Selbst wenn man die Grenze, worin die Neigungen der Planetenbahnen wegen der Divergenz der Pallasbahn hätten eingeschlossen bleiben sollen, bis auf 40° ausdehnt, ergibt sich kein günstiges Resultat. Für diesen Fall erhebt sich die Summe der Neigungen dieser Planetenbahnen auf ungefähr 100°. Die Wahrscheinlichkeit nun, dafs die Summe dieser Neigungen sich nicht über 100° erheben werde, ergibt sich, wenn in der Gleichung 12 §. 12 $n = 100$, $h = 40$ und $q = 5$ gesetzt wird und ist

$$w = \frac{1}{1^{10}|1^{10}}[5^{10} - 10 \cdot 3^{10} + 45 \cdot 1^{10}] = 0{,}002469173 \ldots$$

Ein Werth, der viel zu unbedeutend ist, um eine andere Annahme zu begründen, und daher auf die oben gemachten Schlüsse zurückweist.

Wir beschliefsen diese Abhandlung mit folgender Anwendung

Ein Collegium, das aus fünf Richtern besteht, hat mit Ja oder Nein über eine vorgelegte Frage zu entscheiden. Wir nehmen an, dafs die Gründe, welche Für und Gegen sprechen, gleich, und dafs sofort auch die Motive eines jeden einzelnen Richters sich für Ja oder Nein zu entscheiden, gleich grofs sind. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Collegium mit Ja entscheiden werde?

Nach den Prämissen der Aufgabe ist kein bestimmter Werth den

Motiven untergelegt. Es sind daher alle gedenkbare Abstufungen für diese Werthe, zwischen 0 und 1 anzunehmen. Die Wahrscheinlichkeiten für jede einzelne Abstufung innerhalb dieser Grenzen sind sich gleich. Alle Werthe zwischen 0 und 1 bilden die erzeugenden Elemente. Es entstehen daher alle möglichen Summen von 0 bis 5 zur $5^{ten}$ Classe. Legt man nun jeder Summe einen bestimmten Werth in der Entscheidung der Frage über Ja und Nein bei, so wird die Summe 0 die einstimmige Entscheidung aller Richter für Nein, die Summe 5 die einstimmige Entscheidung für Ja bezeichnen. Zwischen diesen Grenzwerthen liegen alle gedenkbaren Abstufungen für diese Entscheidungen. Die Summen von $\frac{5}{2}$ und darüber werden daher die für die fragliche Wahrscheinlichkeit günstigen Fälle bezeichnen. Wird hiernach die Gleichung 10 §. 12, Pg. 68 benützt und in ihr $n=5$, $r=1$, $q=5$, $m=\frac{5}{2}$ gesetzt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$11)\ w=\frac{1}{1^{5|1}}\left(5^5-\left(\frac{5}{2}\right)^5-5\left[4^5-\left(\frac{3}{2}\right)^5\right]+\ldots\right)=\frac{1}{2}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die Wahrscheinlichkeit, dafs mit Ja entschieden werden wird, eben so grofs als die, dafs mit Nein entschieden werden wird.

Die Bedingungen sind dieselben. Die Gründe Für und Gegen sind nicht gleich. Sie neigen sich auf die eine Seite (etwa für Ja) und zwar in steigendem arithmetischem Verhältnisse. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs für diese Seite entschieden werden wird?

Da die Gründe sich auf die eine Seite neigen, so werden sich auch die Motive der einzelnen Richter hiernach bestimmen. Die Wahrscheinlichkeiten, sich für die verschiedenen Grade der Abstufungen zwischen Nein und Ja zu entscheiden, werden nicht gleich seyn, sondern nach dem gegebenen Verhältnisse zunehmen. Liegen die Grenzen hiefür auch zwischen 0 und 1, so ergibt sich in Beziehung auf die vorhin gemachte Bemerkung die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn $n=5$, $m=\frac{5}{2}$ in $q=5$, $h=1$ in 11 §. 12, Pg. 68 gesetzt wird. Es ist

$$12)\ w = \frac{2^5}{1^{10|1}}\left[5^{10} - 5.[4^{10} + 10.4^9] + \ldots\right]$$

$$-\frac{2^5}{1^{10|1}}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{10} - 5\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10} + 10.\left(\frac{3}{2}\right)^9\right] + \ldots\right] = 0{,}935358\ldots$$

**Der Werth dieser Wahrscheinlichkeit ist nicht unbedeutend, und es läfst sich ungefähr 15 gegen 1 wetten, dafs nach der oben angegebenen Voraussetzung die Entscheidung ausfallen werde.**

**Wenden wir die Bemerkungen zu 11 und 12 auf 1, 2, 3, 4, 6, . . . Personen an, die in einer Sache mit Ja oder Nein zu entscheiden haben, so werden die Wahrscheinlichkeiten, für Ja oder Nein zu entscheiden, immer einander gleich seyn, wenn die Gründe Für und Gegen einander gleich sind. Neigen sich aber die Gründe auf die eine Seite nach dem oben angenommenen Maafse, so haben die Wahrscheinlichkeiten, dafs für diese werde entschieden werden, folgende Werthe**

$w_1 = 0{,}75$
$w_2 = 0{,}8333\ldots$
$w_3 = 0{,}88020833\ldots$
$w_4 = 0{,}9126984\ldots$
$w_5 = 0{,}935358\ldots$
$w_6 = 0{,}951677\ldots$

**u. s. w., wenn durch $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$, . . . die Wahrscheinlichkeiten für die Entscheidung durch 1, 2, 3, 4, . . . Personen bezeichnet und nach der Gleichung 11 §. 12 bestimmt werden.**

**Die Werthe dieser Wahrscheinlichkeiten wachsen, wie sich aus dieser Zusammenstellung ergibt. Unter diesen Voraussetzungen wird ein Urtheil um so entschiedener ausfallen, je mehr Personen zu urtheilen haben. Es ist daher nicht gleichgültig, wie viele Personen in einer Sache zu entscheiden haben, und es kann nicht zweifelhaft seyn, ob das Interesse eines Betheiligten besser durch eine gröfsere oder durch eine kleinere Zahl von Richtern vertreten werde.**

**Kehren wir nun die erhaltenen Resultate um, so folgert sich leicht: Entscheidet ein Collegium mit unbedeutender Majorität, so werden die Gründe Für und Gegen gleich oder nahe gleich seyn; entscheidet**

es mit bedeutender Majorität, oder gar mit Einstimmigkeit, so werden die Gründe Für die Gegen überwiegen.

Diese Schlüsse sind jedoch nur bei einem Collegium, das aus intelligenten und gewissenhaften Richtern besteht, zulässig. Es lassen sich noch weitere Anwendungen aus den hier aufgefundenen Gleichungen auf Entscheidungen machen, welche aus Collegien, oder Versammlungen hervorgehen, worin bestimmte Ansichten, Observanzen u. s. w. vorherrschen mögen, auf Entschlüsse einzelner Personen bei bestimmter Charakter-Richtung, auf die Erwählung concurrirender Candidaten bei verschiedenen Verdiensten zu irgend einem Amte und dergl. Doch überlassen wir diefs dem Leser.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Oettinger, Ludwig,

Die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementen-Reihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung

Freiburg 1840

4 Diss. 3847,11
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10976186-7